

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK

## **ZAVRŠNI RAD**

TEMA: Krutost elemenata statičkog sustava

Osijek, 2017.



# ZAVRŠNI RAD

TEMA: Krutost elemenata statičkog sustava

TOPIC: The stiffness of static system elements

Osijek, 15.9.2017

Degiacinto Robert

---



---

ZNANSTVENO PODRUČJE:	TEHNIČKE ZNANOSTI
ZNANSTVENO POLJE:	TEMELJNE TEHNIČKE ZNANOSTI
ZNANSTVENA GRANA:	TEHNIČKA MEHANIKA
TEMA:	KRUTOST ELEMENATA STATIČKOG SUSTAVA
PRISTUPNIK:	ROBERT DEGIACINTO
NAZIV STUDIJA:	PREDDIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ

## ZAVRŠNI RAD

### Sveučilišni preddiplomski studij

Pristupnik treba prikazati značenje i ulogu termina krutosti statičkih sustava koje koristimo u proračunu statičkih sustava. Treba riješiti 2 računski primjera statički neodređenih sustava koristeći točnu metodu pomaka koja koristi krutost za izračun istih, te usporediti rezultate analitičkih i numeričkih proračuna. Rad treba sadržavati tekstualni dio, grafičke priloge, te popis literature i internet stranica sa koji su prikupljeni podatci za rad.

Rad treba predati u 3 primjerka (original + 2 kopije), spiralno uvezana u A4 formatu i cjelovitu elektroničku datoteku na CD-u. Rad treba biti u PDF formatu –jedna datoteka (na kojoj se osim samog rada treba nalaziti i sažetak na hrvatskom jeziku)

Osijek, 2017.

Mentorica:

Izv.prof.dr.sc.Silva Lozančić,d.i.g

Predsjednica Odbora za  
Završne i diplomske ispite:

Izv.prof.dr.sc.Mirjana

Bošnjak Klečina



## Sadržaj

1. Sažetak :	5
2. Krutost	6
3. Primjer 1	13
3.1 Usporedba krutosti :	17
4. Točna metoda pomaka:	20
5. Zadatak 1.	28
5.1. Dijagrami :	41
5.2. Numerički model 1. zadatka.....	42
5.3. Usporedba analitičkog i numeričkog modela:.....	44
6. Zadatak 2 :	46
6.1. Dijagrami :	55
6.2. Numerički model 2. zadatka.....	56
6.3. Usporedba analitičkog i numeričkog modela:.....	57
7. Zaključak :	58
8. Litaratura :	59



## 1. Sažetak :

U ovom radu će se teoretski i analitički obraditi pojam krutosti elemenata te uloga krutosti u građevinarstvu.

Objasnit će se točna metoda pomaka, obradit će se 2 analitička primjera zadatka koristeći točnu metodu pomaka-ista koristi krutost elemenata za izračun nepoznanica u matričnom obliku.

Objasniti će se i prikazati kakav je odnos sile i pomaka na jednom elementu sustava i na cijelom sustavu. Oba zadatka će se riješiti analitičkim putem, potom obraditi u softverskom paketu Autodesk Robot Structural Analysis Profesional 2016 radi usporedbe rezultata.

## Summary :

This paper work is about stiffness of the elements treated theoretically and analytically and the significance of stiffness in the construction industry.

Correct method of displacement will be explained followed by 2 analytical examples of correct method displacement- same method is using the stiffness of the elements for calculation unknowns in matrix form.

It will be explained and shown the relationship between force and displacement between system elements and the system itself. Both tasks will be solved analytically, then processed in the Autodesk Robot Structural Analysis Profesional 2016 software package for comparison purposes.

## 2. Krutost

Krutost (eng. stiffness )  $k$  je svojstvo materijala koje se može definirati kao otpornost na deformaciju, odnosno odnos sile  $F$  koja uzrokuje deformaciju i same deformacije  $x$ .

$$k = \frac{F}{x}$$

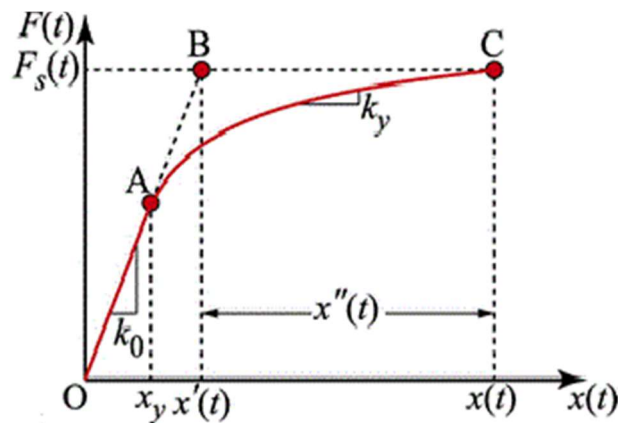
gdje je:

$k$ - krutost materijala, mjerna jedinica  $[N/m]$

$F$ - opterećenje, sila, mjerna jedinica  $[N]$

$x$ - deformacija, mjerna jedinica  $[m]$

Iz gore navedene jednadžbe vidljivo je da je mjerna jedinica za krutost  $k$   $[N/m]$  njutn po metru, odnosno potrebna sila  $F$   $[N]$  za jediničnu deformaciju  $x$   $[m]$ . Krutost nam je vrlo važna u primjenjenim znanostima u strojarstvu, brodogradnji i građevinarstvu te je jedan od temeljnih pojmova u fizici čvrstog tijela.



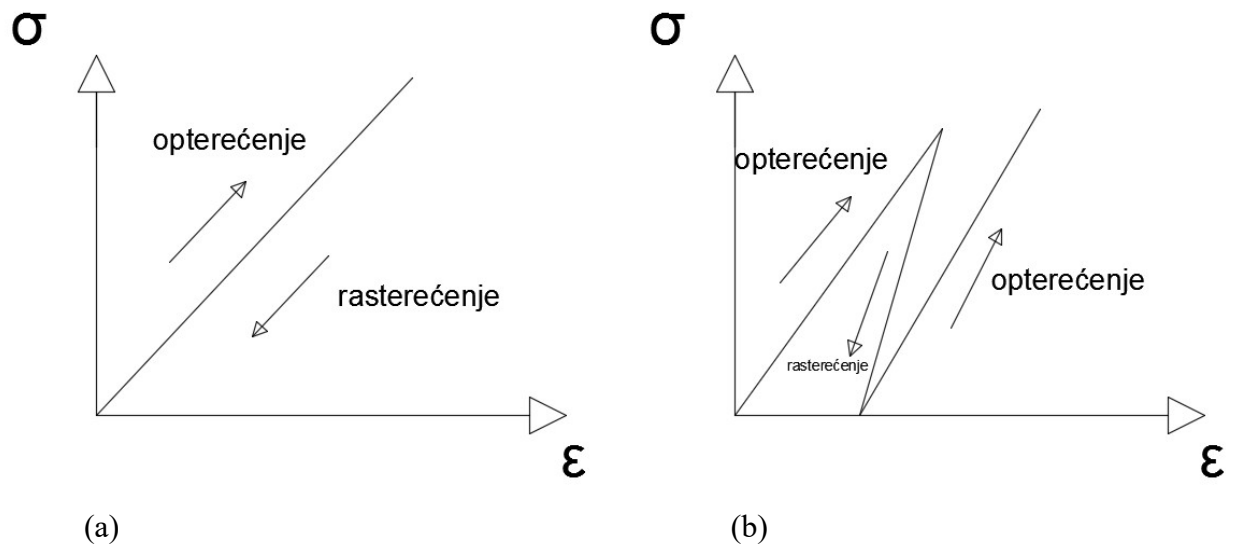
Slika 1.Odnos opterećenja  $F$  i deformacije  $x$

Dijagram odnosa statičkog opterećenja  $F$  i deformacije  $x$  (Slika 1. ) nam predstavlja krutost koju smo definirali kao silu potrebnu za jediničnu deformaciju materijala odnosno elementa. Uzmemo li komad žice krutosti  $500 \text{ N/m}$  i na nju objesimo uteg  $500 \text{ N}$ , žica će se tada deformirati, odnosno produžiti za  $1 \text{ m}$ . Ovaj koncept je vrlo koristan kod inženjera koji hoće znati kako će se komponente ponašati pod utjecajem opterećenja. Za znanstvenike koji proučavaju karakteristike materijala, definicija krutosti je poprilično nezadovoljavajuća i nepotpuna. Ako uzmemo 2 iste gore navedene žice, te ih objesimo paralelno jedna pokraj druge, te na obe žice objesimo jedan

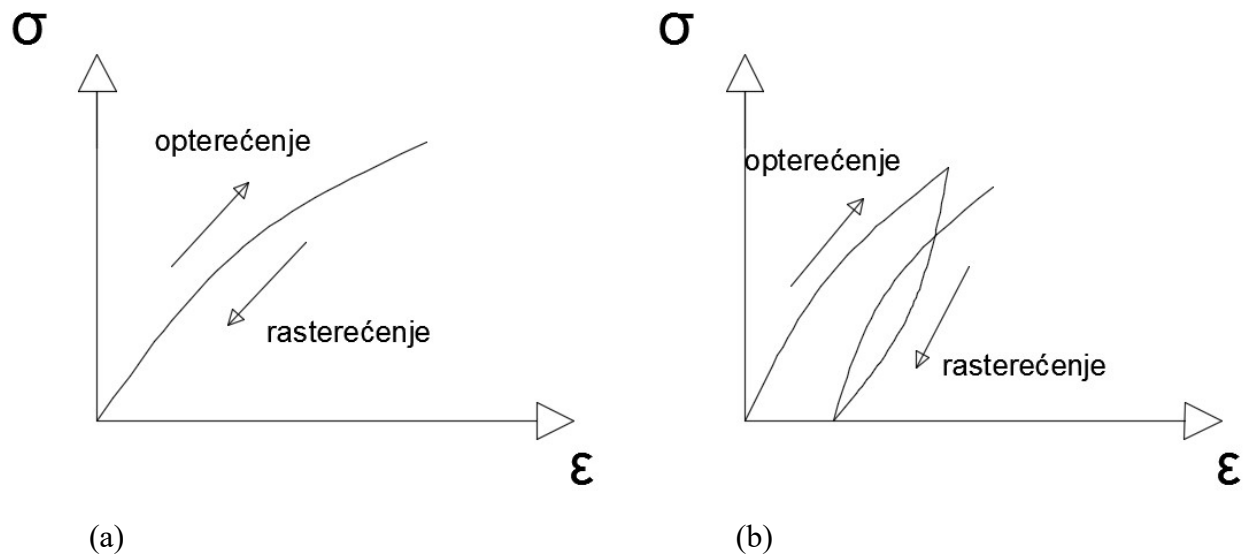
uteg od 500 N, deformacija će iznositi 0,5 m, a krutost sistema će iznositi 1000 N/m. U drugom slučaju, ako obe žice spojimo serijski, početak druge žice na kraj prve žice, deformacija će iznositi 2 m, a krutost sistema će iznositi 250 N/m. Kao što je vidljivo iz primjera, krutost nije prava, jednoznačna karakteristika materijala na koju će utjecati više faktora koji će biti navedeni u daljnjem tekstu.

Vrlo je važno razlikovati modul elastičnosti materijala  $E$  [N/m<sup>2</sup>] od krutosti materijala  $k$  [N/m]. Modul elastičnosti  $E$  je omjer vlačnog naprezanja  $\sigma$  i vlačne deformacije  $\epsilon$ , dok je krutost  $k$  omjer sile  $F$  i deformacije  $x$ . Za razliku od krutosti, modul elastičnosti je prava, jednoznačna karakteristika materijala na koju ne utječe geometrija poprečnog presjeka ili sila kojom smo djelovali kao kod krutosti. U formiranju krutosti ulazi veličina  $E$  u produktu i kvocijentu s drugim veličinama.

Materijal konstrukcije može biti linearno i nelinearno elastičan ili elastoplastičan. Kod elastičnog materijala, pri uklanjanju opterećenja element konstrukcije se vraća u prvobitno stanje za razliku od plastičnog materijala kod kojeg će pri rasterećenju elementa jedan dio deformacije ostati trajan, odnosno neće se vratiti u prvobitan položaj.



Slika 2. Linearan odnos naprezanja i deformacije. (a) elastičan materijal (b) elastoplastičan materijal



Slika 3. Nelinearan odnos naprezanja i deformacije. (a) elastičan materijal (b) elastoplastičan materijal

Dijagram krutosti (Slika 1. ) može se podijeliti na 2 dijela. Prvi dio od točke O do točke A predstavlja linearni dio, odnos sile i deformacije je linearan- krutost je konstantna odnosno proračun ovih sustava se radi po linearnoj teoriji, dok drugi dio, od točke A do točke C, predstavlja nelinearni dio krutosti odnosno nelinearnu teoriju krutosti.

U linearnom dijelu krutost  $k_0$  je konstantna, odnosno odnos između sile i deformacije je konstantan.

Nakon točke A, krutost se više ne ponaša linearno, odnosno mijenja se pri procesu deformacije.

Krutost tijela zavisi o 3 primarna faktora:

#### 1) Materijala tijela :

Tijelo (profil) od čelika će imati veću krutost u usporedbi sa željeznim profilom, razlog tomu je veća čvrstoća čelika u usporedbi sa željezom.

#### 2) Oblika tijela :

I profil će imati različitu krutost od U profila načinjenog od istog materijala.

#### 3) Rubnim uvjetima tijela :

Jednostrano upeta greda će imati manju krutost od iste obostrano upete grede.



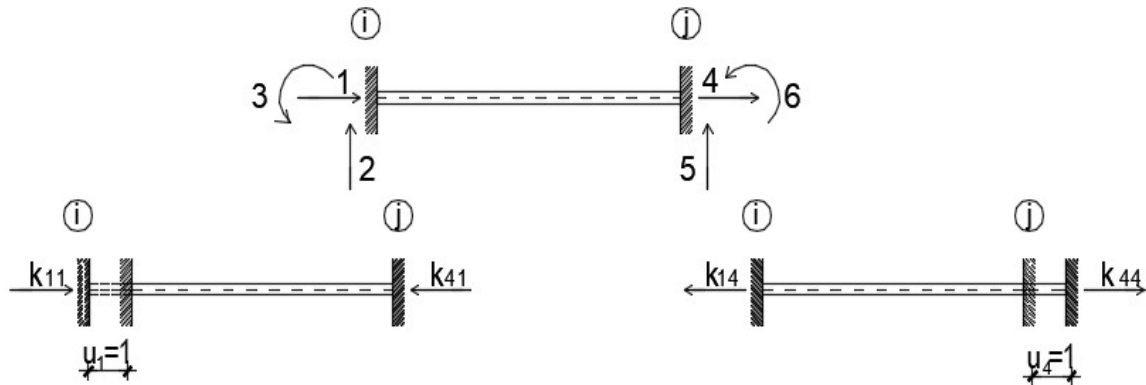
U prethodnom koraku napisano je da krutost ovisi o materijalu tijela, odnosno krutost drvenog i čeličnog nosača neće biti jednaka, odnosno drveni nosač će se više deformirati u odnosu na jednake dimenzije čeličnog nosača jer je krutost drvenog nosača manja u odnosu na čelični (zbog  $E$  i  $G$  koji su veći kod čelika). Jednostrano upeta greda će se više deformirati u odnosu na obostrano upetu, definiran je utjecaj vrste opterećenja na krutost nosača-imamo aksijalnu, fleksijalnu i posmičnu krutost. Da bi razjasnili, uzet ćemo jednostavni primjer štapa. Opteretimo li štap aksijalnom ( sila paralelna sa uzdužnom osi nosača ) tlačnom silom, štap će se deformirati, opteretimo li taj isti štap istom silom okomito na njegovu uzdužnu os, deformacija štapa pri istoj sili će biti različita u odnosu deformaciju pri aksijalnom opterećenju

Prema tome, ovisno o načinu djelovanja opterećenja, ili posljedičnoj deformaciji, na nosaču geometrijskih i mehaničkih svojstava, Young-ova modula elastičnosti  $E$ , površine poprečnog presjeka  $A$ , duljine nosača  $L$ , momenta tromosti  $I$ , možemo definirati sljedeće vrste krutosti na obostrano upetoj gredi:

#### 1) Aksijalna krutost :

Aksijalna krutost nam kaže kolika je aksijalna sila  $[N]$  ( u globalnom kordinatnom sustavu u smjeru  $x$  osi ) potrebna za jediničnu deformaciju  $u=1$  štapa.

Vrijednost proporcionalna umnošku površine poprečnog presjeka  $A$  i Young-ova modula elastičnosti  $E$  , a obrnuto proporcionalna duljini nosača  $L$ .



Slika 4. Aksijalna krutost

$$k_{11} = \frac{A \cdot E}{L} = -k_{41}$$

$$k_{44} = \frac{A \cdot E}{L} = -k_{14}$$

gdje je:

$k_{ij}$ -aksijalna krutost  $[N/m]$

i-mjesto sile

j-mjesto pomaka

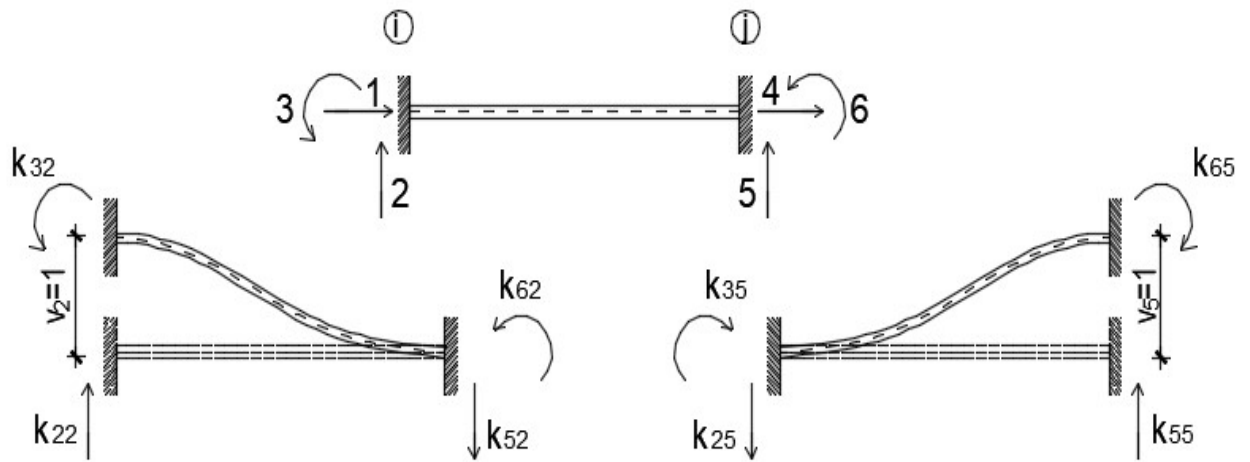
A-površina poprečnog presjeka nosača  $[m^2]$

E- Young-ov modul elastičnosti materijala  $[N/m^2]$

L-duljina nosača  $[m]$

## 2) Posmična krutost :

Posmična krutost je posmična sila T i moment M koji se pojavljuju na rubovima štapa pri jediničnoj posmičnoj deformaciji  $v=1$  ( u globalnom kordinatnom sustavu u smjeru y osi )



Slika 5. Posmična krutost

### 2.1) Posmična sila T :

$$k_{22} = \frac{12 * E * I}{L^3} = -k_{52}$$

$$k_{56} = \frac{12 * E * I}{L^3} = -k_{25}$$

gdje je:

k-posmična krutost  $[N/m]$

I-moment tromosti  $[m^4]$

## 2.2) Moment M :

$$k_{32} = \frac{6 * E * I}{L^2} = k_{62}$$

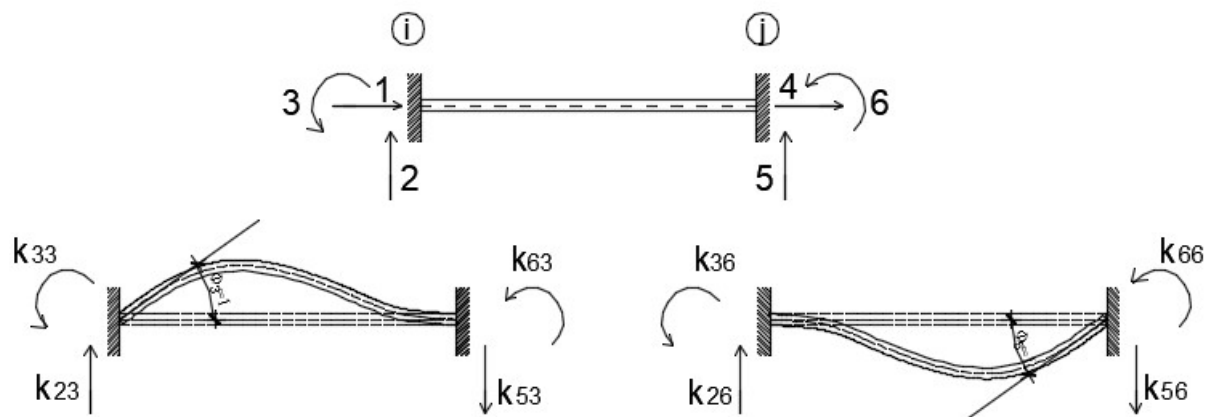
$$k_{65} = \frac{6 * E * I}{L^2} = k_{35}$$

gdje je:

k-posmična krutost [N/m]

## 3) Fleksijska krutost :

Fleksijska krutost je posmična sila T i moment M koji se pojavljuju na rubovima štapa pri jediničnom kutu zaokreta štapa  $\Phi=1$ .



Slika 6. Fleksijska krutost

## 3.1) Posmična sila T :

$$k_{23} = \frac{6 * E * I}{L^2} = -k_{53}$$

$$k_{56} = \frac{6 * E * I}{L^2} = -k_{26}$$

gdje je:

k-fleksijska krutost [N/m]

## 3.2) Moment M :

$$k_{33} = \frac{4 * E * I}{L} = k_{66}$$

$$k_{63} = \frac{2 * E * I}{L} = k_{36}$$

Gore navedene krutosti grede možemo zapisati u obliku lokalne matrice krutosti :

$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v & \varphi & u & v & \varphi \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} N & 1 \\ T & 2 \\ M & 3 \\ N & 4 \\ T & 5 \\ M & 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v & \varphi & u & v & \varphi \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} N & 1 \\ T & 2 \\ M & 3 \\ N & 4 \\ T & 5 \\ M & 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Krutost kod statički neodređenih sustava koristi se za određivanje sila-što će se vidjeti u naredna 2 analitička zadatka, dok kod statički određenih sustava se koristi za izračun pomaka.

### 3. Primjer 1

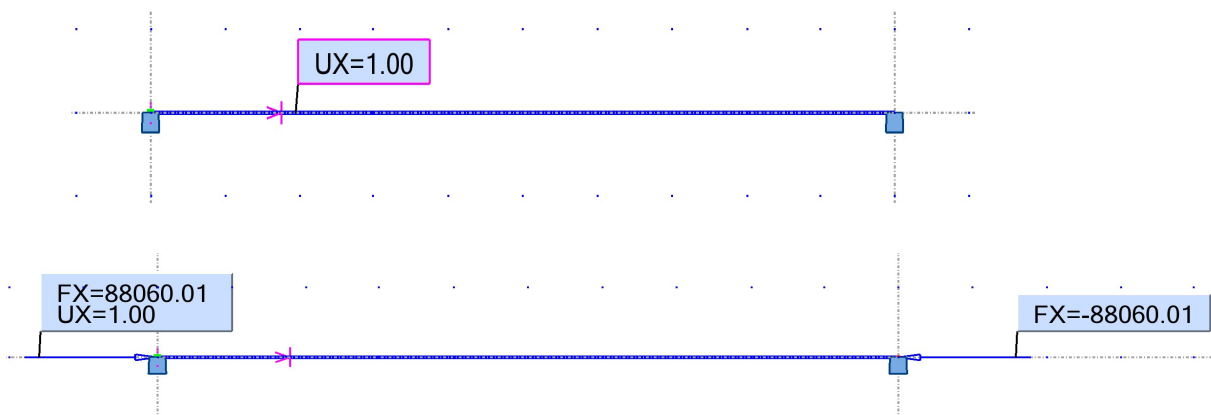
Određivanja elemenata matrice krutosti obostrano upete grede, duljine 10 m sljedećih karakteristika, pomoću programskog paketa Robot-sa ciljem razumjevanja značenja članova matrice krutosti:

ŠIROKOPOJASNI H – PROFIL ( HEB 140)			
h (mm)	140	$W_{el,y}$ (cm <sup>3</sup> )	215,60
b (mm)	140	$W_{el,z}$ (cm <sup>3</sup> )	78,52
$t_w$ (mm)	7,00	$W_{pl,y}$ (cm <sup>3</sup> )	245,40
$t_f$ (mm)	12,00	$W_{pl,z}$ (cm <sup>3</sup> )	119,80
r (mm)	12,00	$i_y$ (cm)	5,93
A (cm <sup>2</sup> )	42,96	$i_z$ (cm)	3,58
G (kg/m)	33,70	$I_t$ (cm <sup>4</sup> )	20,06
$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	1509,00		
$I_z$ (cm <sup>4</sup> )	549,70		

Slika 7. Geometrijske karakteristike grede

Aksijalna krutost:

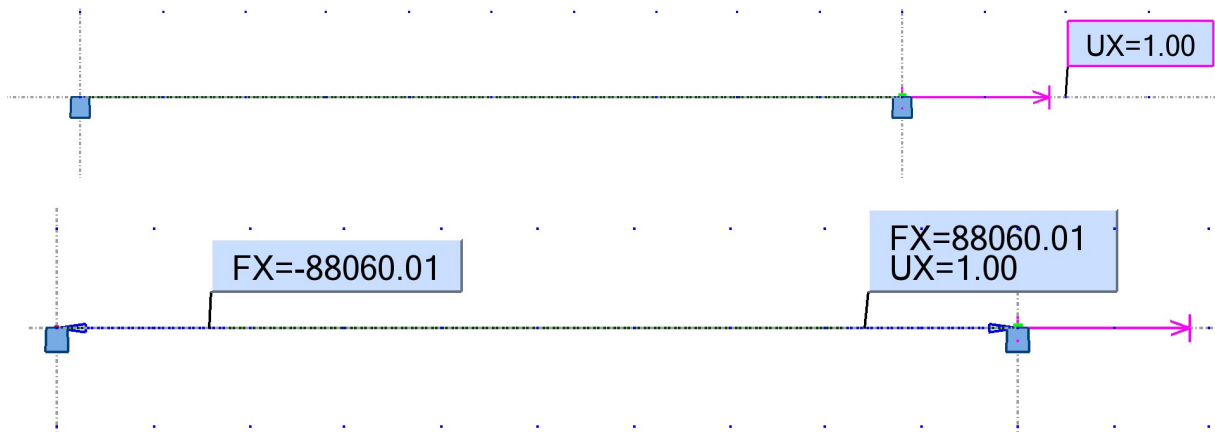
$$1) u_1 = 1$$



$$F_x = \frac{EA}{L} = \frac{(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(4,296 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{10 \text{ m}} = 88 \text{ 068 kN/m}$$



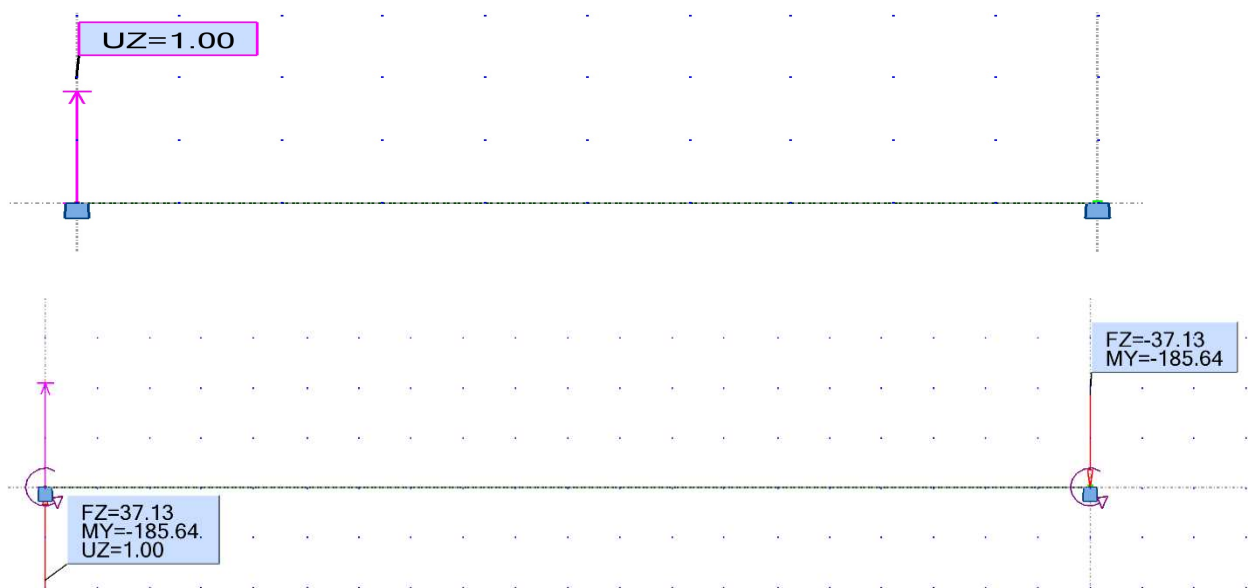
2)  $u_4 = 1$



$$F_x = \frac{EA}{L} = \frac{(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(4,296 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}{10 \text{ m}} = 88\,068 \text{ kN/m}$$

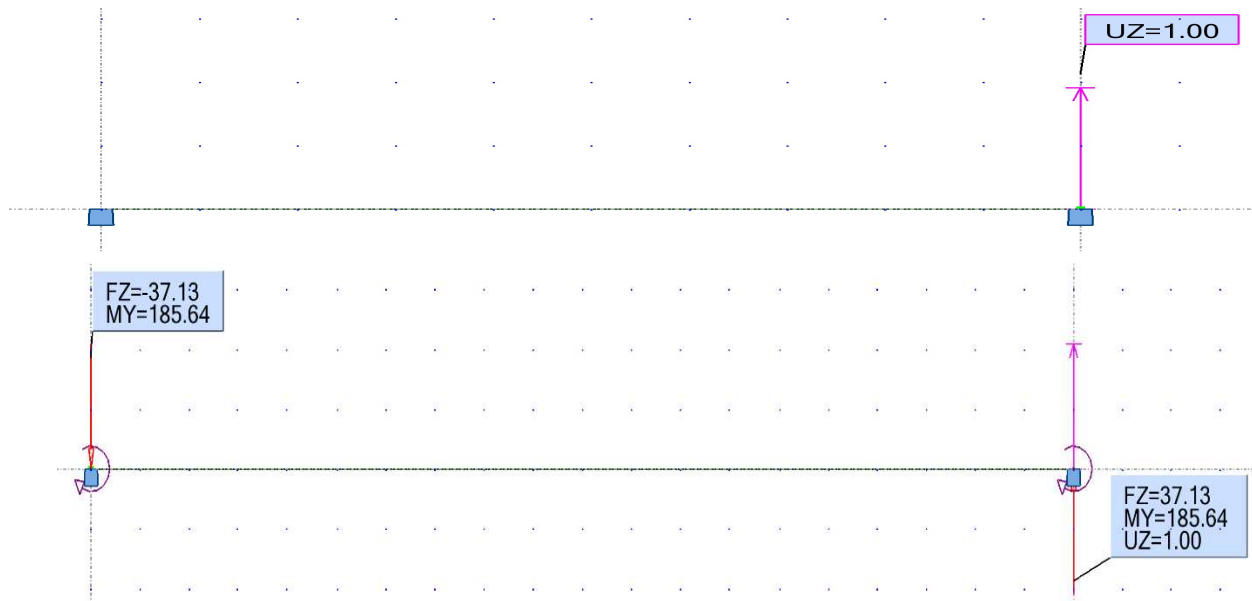
Posmična krutost:

1)  $v_2 = 1$



$$F_z = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \left( 205 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4}{10^3 \text{ m}} = 37,12 \text{ kN/m}$$

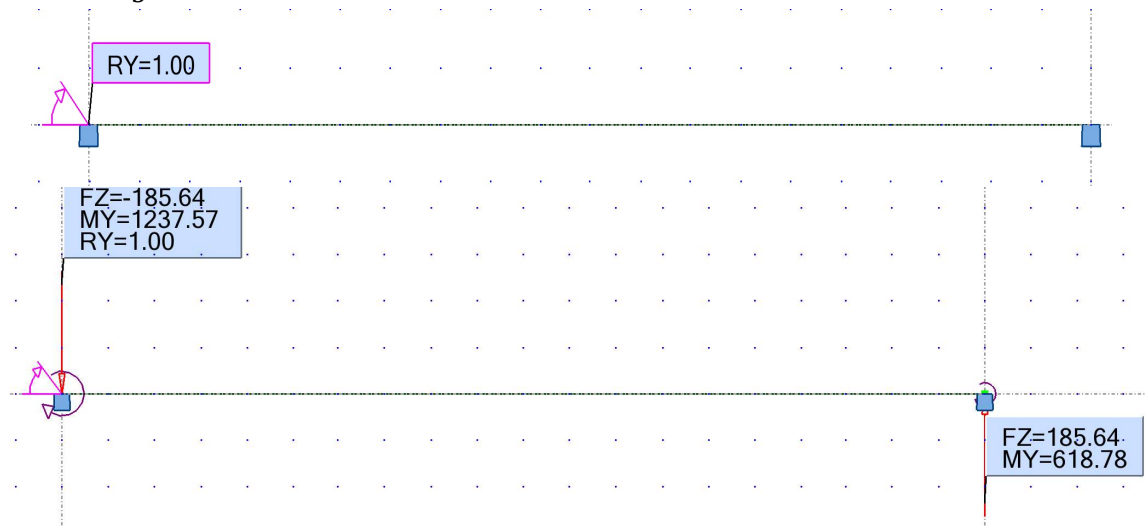
$$M_y = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,505 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10^2 \text{ m}} = 185,61 \text{ kN/m}$$

2)  $v_5 = 1$ 

$$F_Z = \frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \left( 205 \times 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right) 1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4}{10^3 \text{ m}} = 37,12 \text{ kN/m}$$

$$M_Y = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10^2 \text{ m}} = 185,61 \text{ kN/m}$$

Fleksijska krutost:

1)  $\varphi_3 = 1$ 

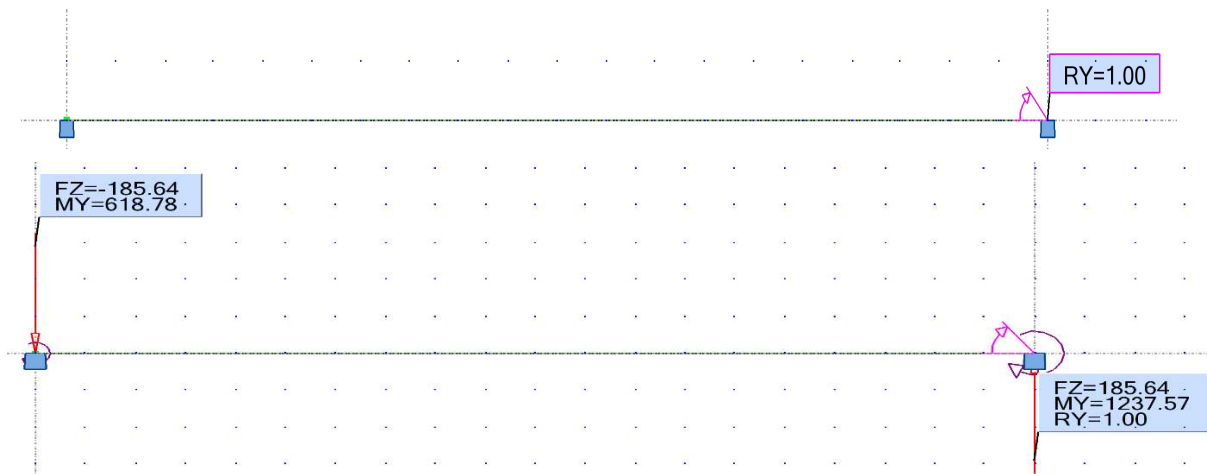


$$M_{Y \text{ LIJEVO}} = \frac{4EI}{L} = \frac{4(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10 \text{ m}} = 1237,38 \text{ kN/m}$$

$$M_{Y \text{ DESNO}} = \frac{2EI}{L} = \frac{2(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10 \text{ m}} = 618,69 \text{ kN/m}$$

$$F_Z = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10^2 \text{ m}} = 185,61 \text{ kN/m}$$

$$2) \varphi_6 = 1$$



$$M_{Y \text{ DESNO}} = \frac{4EI}{L} = \frac{4(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10 \text{ m}} = 1237,38 \text{ kN/m}$$

$$M_{Y \text{ LIJEVO}} = \frac{2EI}{L} = \frac{2(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10 \text{ m}} = 618,69 \text{ kN/m}$$

$$F_Z = \frac{6EI}{L^2} = \frac{6(205 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(1,509 \times 10^{-5} \text{ m}^4)}{10^2 \text{ m}} = 185,61 \text{ kN/m}$$





Matrica krutosti primjera :

$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 88080,01 & 0 & 0 & -88080,01 & 0 & 0 \\ 0 & 37,13 & 185,64 & 0 & -37,13 & 185,64 \\ 0 & 185,64 & 1237,57 & 0 & -185,64 & 618,78 \\ -88080,01 & 0 & 0 & 88080,01 & 0 & 0 \\ 0 & -37,13 & -185,64 & 0 & 37,13 & -185,64 \\ 0 & 185,64 & 618,78 & 0 & -185,64 & 1237,57 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### 3.1 Usporedba krutosti :

Usporedba krutosti obostrano upete grede duljine 10 m, sa profilima jednakih fizikalnih karakteristika ali različite površine poprečnog presjeka:

Usporedba krutosti dvaju profila												
HEB 140							HEB 300					
	1	2	3	4	5	6	u 1	v 2	φ 3	u 4	v 5	φ 6
1	88080,01	0	0	-88080,01	0	0	N 1	305609,9	0	0	-305609,9	0
2	0	37,13	185,64	0	-37,13	185,64	T 2	0	619,08	3095,38	0	-619,08
3	0	185,64	1237,57	0	-185,64	618,78	M 3	0	3095,4	20635,87	0	-3095,4
4	-88080,01	0	0	88080,01	0	0	N 4	-305609,9	0	0	305609,9	0
5	0	-37,13	-185,64	0	37,13	-185,64	T 5	0	-619,08	-3095,38	0	619,08
6	0	185,64	618,78	0	-185,64	1237,57	M 6	0	3095,4	10317,9	0	-3095,4

Slika 8. Usporedba krutosti dvaju profila

Kao što je vidljivo iz prethodne usporedbe, krutosti profila jednakih duljina i istih rubnih uvjeta su različite zbog različitog profila, odnosno HEB 300 profil ima veće krutosti od manjeg HEB 140 profila, točnije veći profil ima krutost otprilike 3,5 puta veću.

Kao što je prethodno rečeno rečeno, u linearnom dijelu dijagrama P-u ( $\sigma$ - $\epsilon$ )krutosti kroz cijeli proces deformacije štap ili nosač će imati konstantnu krutost koju je imao u svom nedeformiranom stanju i obliku prije opterećenja. Bez obzira koliko se nosač deformira, bez obzira da li nosač polako optererećujemo ili nanesimo mu silu od jednom, početna krutost će biti zadržana-dok je deformacija u linearnom području. Ova pretpostavka nam uvelike pojednostavljuje problematiku rješavanja nepoznanica iz jednadžbi veze sila i pomaka.

Veza sile i pomaka:

$$[F] = [K] * [d]$$

gdje je:

[F] – poznati vektor čvornog opterećenja

[K] – matrica krutosti

[d] – nepoznati vektor čvornog pomaka

Jednadžba napisana u matričnom obliku :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \varphi_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

Ova matrična jednadžba opisuje ponašanje modela grednog ravninskog elementa. Sadrži veliki broj linearnih algebarskih jednadžbi.

Matrica krutosti [K], kako je već navedeno, ovisi o materijalu tijela, geometriji i rubnim uvjetima tijela.

U linearnom dijelu krutosti i pretpostavkom da se ona ne mijenja, odnosno da je konstanta, matrična jednadžba se rješava u jednom postupku sa jednoznačnim rješenjem.



Kod nelinearnog dijela krutosti, proračun sustava se vrši nelinearnom teorijom, te kako krutost nije konstantna, odnosno mijenja se tijekom procesa deformacije, samim time i matrica krutosti  $[K]$  nije konstantna nego se mijenja, a to se čini iterativnim putem matrične jednadžbe.

Ovisno o nelinearnoj ili linearnoj teoriji proračuna sustava govorimo o sekantnoj ili tangentnoj krutosti

Do sada sve navedeno je bilo vezano za statičko opterećenje, no što je sa dinamičkim? Deformacija elementa će ovisiti o frekvenciji opterećenja, samim time dinamička krutost će biti ovisna o frekvenciji, odnosno dinamička krutost je frekvencijski ovisan omjer između dinamičke sile i dobivene dinamičke deformacije.



#### 4. Točna metoda pomaka:

Opća (ili točna) metoda pomaka je metoda kojom proračunavamo štapne sisteme i u kojoj su nepoznanice zaokreti i translacijski pomaci odabranih točaka sistema koje zovemo čvorovima. Čvorom možemo proglasiti bilo koju točku, ali obično su to istaknute točke na sistemu, odnosno točke u kojima se sastaje više štapova, točke u kojima se sastaju dva štapa, ali pod nekim kutom, i slično. Ako se ograničimo na ravninske štapne sisteme obrađene u daljenjem tekstu kroz teoriju i numerički kroz primjere zadataka, svaki čvor i ima dva translacijska stupnja slobode (ako sistem prikazemo u ravnini xy bit će to pomaci  $u_i$ , u smjeru osi  $x$ , i  $v_i$ , u smjeru osi  $y$ ) i jedan zaokret  $\phi_i$  oko osi okomite na ravninu sistema. Ova metoda je baza za metodu konačnih elemenata-koja je široko rasprostranjena u računalnim softverima za statičke, dinamičke, hidrotehničke i druge slične proračune i analize, kao što je Autodesk Robot koji je u ovom radu korišten za numerički izračun zadataka.

Osnovna ideja metode pomaka sastoji se u sljedećem:

- zadani sistem dovedemo u stanje spriječenih pomaka čvorova tako da sistemu dodamo zamišljene veze koje sprječavaju moguće pomake koji su nepoznanica u ovoj metodi;
- time se sistem 'raspada' na niz međusobno neovisnih obostrano upetih greda na kojima računamo sile od zadanog opterećenja;
- da bi sistem doveli u isto stanje kao izvorni sistem uklanjanjem dodanih veza sistem dovodimo u stanje slobodnih pomaka čvorova, pa se računaju sile od pomaka čvorova izvornog sistema;
- na samom kraju, konačne sile u elementima dobivamo superpozicijom sila dobivenih u 1. i 2. koraku ove metode, odnosno stanju upetosti i stanju slobodnih pomaka.

Kako bi izračunali pomake iz uvjeta ravnoteže, potrebno je izraziti unutarnje sile preko pomaka, odnosno uspostaviti direktnu vezu između pomaka i unutarnjih sila u pojedinim točkama štapa. Odvojiti ćemo utjecaje pomaka čvorova od utjecaja vanjskog opterećenja. Da izračunamo sile na štapu, koristimo princip superpozicije i izračunamo presječne sile od pomaka čvorova i vanjskih utjecaja odvojeno i poslije dobivene rezultate zbrojimo.

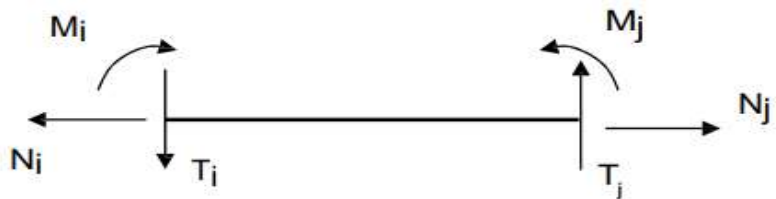
U prvom koraku pretpostaviti ćemo da promatrani štap nije izložen opterećenju i promjeni temperature, pa dobijemo jednadžbe veze sila i pomaka:

$$\begin{aligned}
 u_x(x) &= u_{xi} + \frac{N_i}{EA}x \\
 u_x(x) &= u_{xj} - \frac{N_j}{EA}(L-x) \\
 u_y(x) &= u_{yi} + \varphi_i x + \frac{M_i}{2EI}x^2 - \frac{T_i}{6EI}x^3 \\
 \varphi(x) &= \varphi_i + \frac{M_i}{EI}x - \frac{T_i}{2EI}x^2 \\
 u_y(x) &= u_{yj} - \varphi_j(L-x) + \frac{M_j}{2EI}(L-x)^2 + \frac{T_j}{6EI}(L-x)^3 \\
 \varphi(x) &= \varphi_j - \frac{M_j}{EI}(L-x) - \frac{T_j}{2EI}(L-x)^2
 \end{aligned}$$

Uvrštavajući u prvu, treću i petu jednadžbu  $x = L$ , a u preostale  $x = 0$  dobivamo:

$$\begin{aligned}
 u_{xj} &= u_{xi} + \frac{N_i}{EA}L \Rightarrow N_i = \frac{EA}{L}(u_{xj} - u_{xi}) \\
 u_{xi} &= u_{xj} - \frac{N_j}{EA}L \Rightarrow N_j = EA(u_{xj} - u_{xi}) \\
 u_{yj} &= u_{yi} + \varphi_i L + \frac{M_i}{2EI}L^2 - \frac{T_i}{6EI}L^3 \Rightarrow M_i = -\frac{2EI}{L} \left[ 2\varphi_i + \varphi_j + \frac{3(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right] \\
 \varphi_j &= \varphi_i + \frac{M_i}{EI}L - \frac{T_i}{2EI}L^2 \Rightarrow T_i = -\frac{6EI}{L^2} \left[ \varphi_i + \varphi_j + \frac{2(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right] \\
 u_{yi} &= u_{yj} - \varphi_j L + \frac{M_j}{2EI}L^2 + \frac{T_j}{6EI}L^3 \Rightarrow M_j = \frac{2EI}{L} \left[ 2\varphi_j + \varphi_i + \frac{3(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right] \\
 \varphi_i &= \varphi_j - \frac{M_j}{EI}L - \frac{T_j}{2EI}L^2 \Rightarrow T_j = -\frac{6EI}{L^2} \left[ \varphi_i + \varphi_j + \frac{2(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right]
 \end{aligned}$$

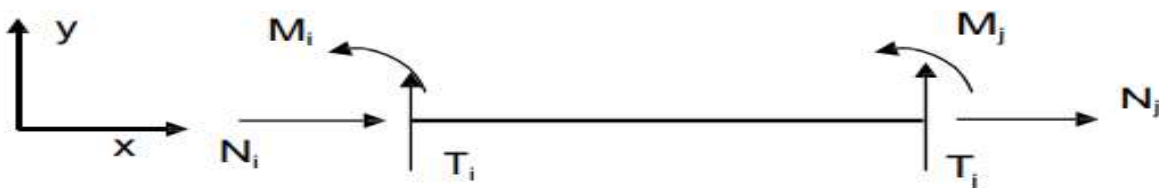
Jednadžbe su dobivene pod pretpostavkom da su pozitivne sile  $M$ ,  $T$  i  $N$  u skladu sa konvencijom sila i momenata:



Slika 9. Inženjerska konvencija

Obzirom da se u metodi pomaka postavlja ravnoteža kompletnog sistema, predznake svih sila i pomaka definirati u odnosu na lokalni koordinatni sustav šapa, a kada te sile prebacimo u čvorove moramo ih transformirati u globalni koordinatni sustav.

U metodi pomaka konvencija sile je nešto drugačija, naime pozitivne sile su u smjeru koordinatnog sustava :



Slika 10. Konvencija predznaka u metodi pomaka

Uzevši u obzir gore navedenu konvenciju predznaka, slijede jednačbe:

$$N_i = \frac{EA}{L}(u_{xi} - u_{xj})$$

$$M_i = \frac{2EI}{L} \left[ 2\varphi_i + \varphi_j + \frac{3(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right]$$

$$T_i = \frac{6EI}{L^2} \left[ \varphi_i + \varphi_j + \frac{2(u_{yi} - u_{yj})}{L} \right]$$

Ukoliko dobivene jednačbe napišemo u matričnom obliku, za obostranu upetu gredu dobijemo :

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \varphi_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

Na kraju, može se napisati jednačba za presječne sile na krajevima opterećenog štapa preko pomaka:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \varphi_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n_i \\ l_i \\ m_i \\ n_j \\ l_j \\ m_j \end{Bmatrix}$$

odnosno:

$$[q] = [k][d] + [q^F]$$

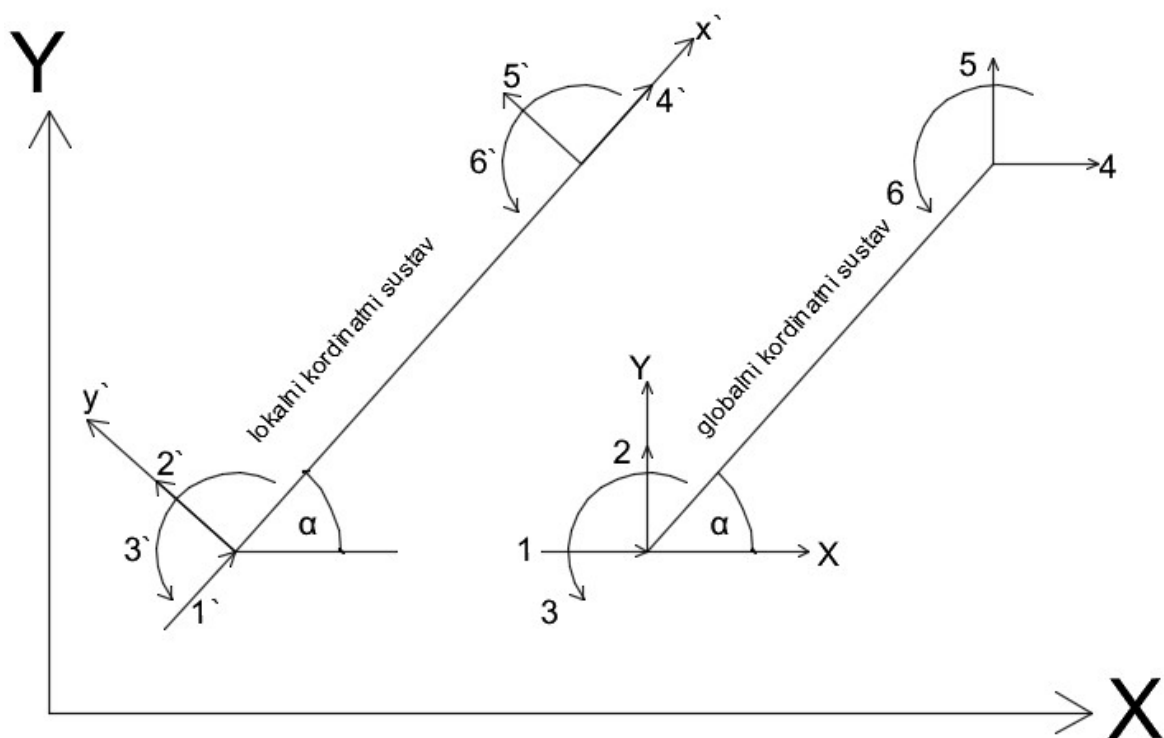
### Matrice transformacije sila i pomaka :

Obzirom da se gore navedene jednadžbe ravnoteže čvorova postavljaju u smjerovima osi globalnog koordinatnog sustava, potrebno je transformirati vektore sila, vektor pomaka i matricu krutosti iz lokalnog u globalni koordinatni sustav.

Lokalni koordinatni sustav za svaki štapni element se postavlja tako da se ishodište sustava nalazi u početnom čvoru tako da lokalna koordinatna os  $x'$  prolazi kroz krajnji čvor elementa.

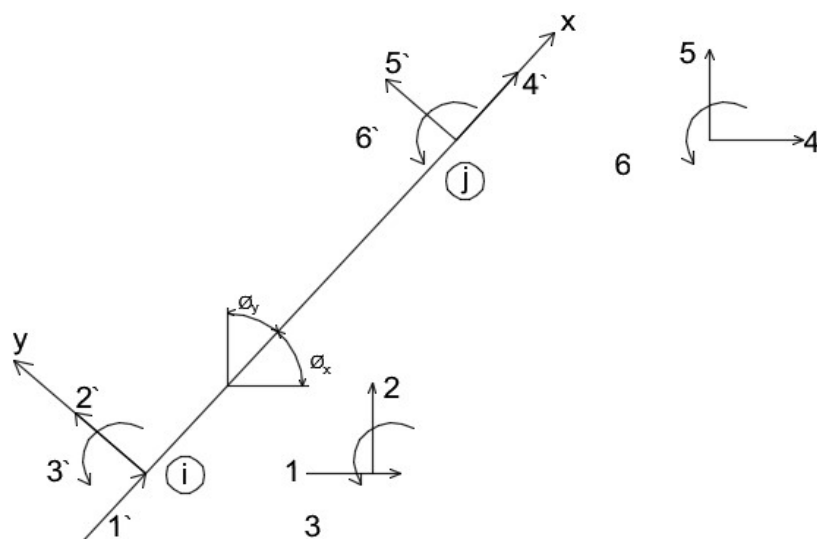
Globalni i lokalni koordinatni sustav moraju biti ekvivalentni, što znači da poklapanje osi istih oznaka možemo postići translacijom uz rotaciju oko osi  $z$ .

Globalni koordinatni sustav služi nam za definiranje geometrije konstrukcije i u odnosu na njega se mjere apsolutni pomaci točaka.



Slika 11. Lokalni i globalni koordinatni sustav

Matrica transformacije sila :



Slika 12. Transformacija sila



**Transformacijska matrica:**

$$\lambda_x = \frac{xj - xi}{L}$$

$$\lambda_y = \frac{yj - yi}{L}$$

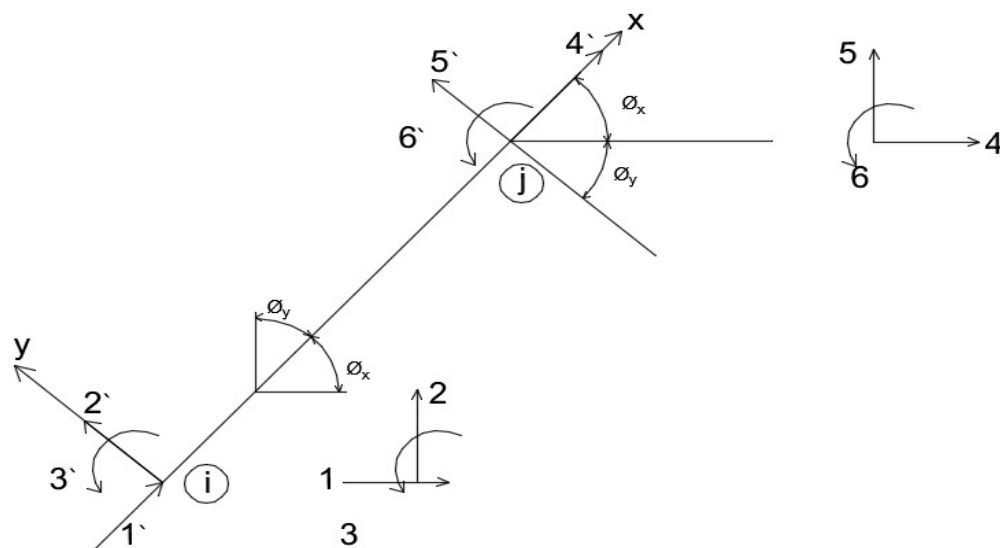
$$[T]^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Jednadžba pretvorbe :

$$[q] = [T]^T [q']$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} q_{1'} \\ q_{2'} \\ q_{3'} \\ q_{4'} \\ q_{5'} \\ q_{6'} \end{bmatrix}$$

Matrica transformacije pomaka :



Slika 13. Transformacija pomaka

Jednadžba pretvorbe :

$$[d'] = [T][d]$$

$$\begin{bmatrix} d_{1'} \\ d_{2'} \\ d_{3'} \\ d_{4'} \\ d_{5'} \\ d_{6'} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}$$

**Globalna matrica krutosti sustava :**

Bitno je razlikovati matricu krutosti pojedinog štap sustava i matricu cijelog sustava koja se nalazi na sljedećoj slici : matrica krutosti 1 štap je samo za 1 štap, međutim pošto se u sustavu sastaje više štapova u čvoru, zbrajaju se njihove krutosti-krutost je sumarna u čvorovima u kojim se

sastaju elementi. Obzirom da je svaki element u svom lokalnom sustavu, koji se ne poklapaju s ostalim elementima, moraju se svi elementi svesti na isti sustav-globalni. Zato se radi transformacija lokalnih matrica u globalni sustav :

$$[k] = [T]^T [k'] [T]$$

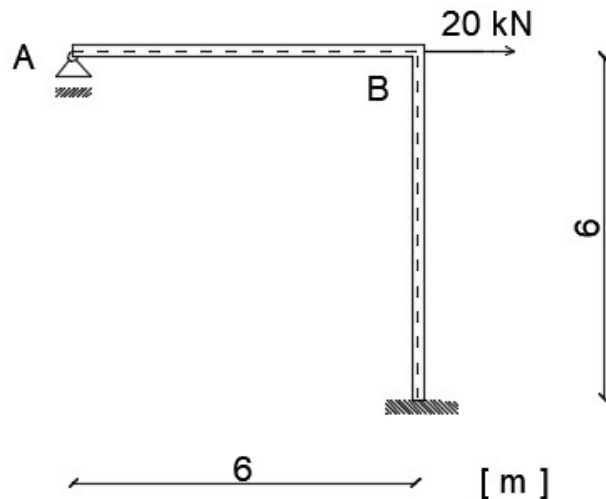
$$\begin{matrix}
 & U_i & V_i & M_i & U_j & V_j & M_j \\
 \begin{matrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{AE}{L} \lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y^2 & (\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \lambda_x \lambda_y & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & -(\frac{AE}{L} \lambda_x \lambda_{yx} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{yy}) & -(\frac{AE}{L} \lambda_{xx} \lambda_{yy} - \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{yx}) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{yx} \\
 (\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \lambda_x \lambda_y & (\frac{AE}{L} \lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_x^2) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & -(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{yx} - \frac{12EI}{L^3} \lambda_{xx} \lambda_{yy}) & -(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{yy} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{xx} \lambda_{yx}) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{xx} \\
 -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{yy} & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{yx} & \frac{2EI}{L} \\
 -(\frac{AE}{L} \lambda_{xx} \lambda_{yx} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{yy}) & -(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{yx} - \frac{12EI}{L^3} \lambda_{xx} \lambda_{yy}) & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{yy} & (\frac{AE}{L} \lambda_{yx}^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{yy}^2) & (\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \lambda_{yx} \lambda_{yy} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{yy} \\
 -(\frac{AE}{L} \lambda_{xx} \lambda_{yy} - \frac{12EI}{L^3} \lambda_y \lambda_{yx}) & -(\frac{AE}{L} \lambda_y \lambda_{yy} + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{xx} \lambda_{yx}) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{yx} & (\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \lambda_{yx} \lambda_{yy} & (\frac{AE}{L} \lambda_{yy}^2 + \frac{12EI}{L^3} \lambda_{yx}^2) & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{yx} \\
 -\frac{6EI}{L^2} \lambda_y & \frac{6EI}{L^2} \lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \lambda_{yy} & -\frac{6EI}{L^2} \lambda_{yx} & \frac{4EI}{L}
 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Slika 14. Transformacija lokalne matrice krutosti u globalnu

## 5. Zadatak 1.

Točnom metodom pomaka će se riješiti statički sustav prikazan na slici, koji je 1 puta statički neodređen te je potrebno odrediti reakcije u ležajevima, dijagrame unutarnjih sila te pomak i zaokret točke B.

Moment tromosti :  $I = 1.8(10^8) \text{ mm}^4$ , površina poprečnog presjeka :  $A = 6(10^3) \text{ mm}^2$ . Young-ov modul elastičnosti :  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$

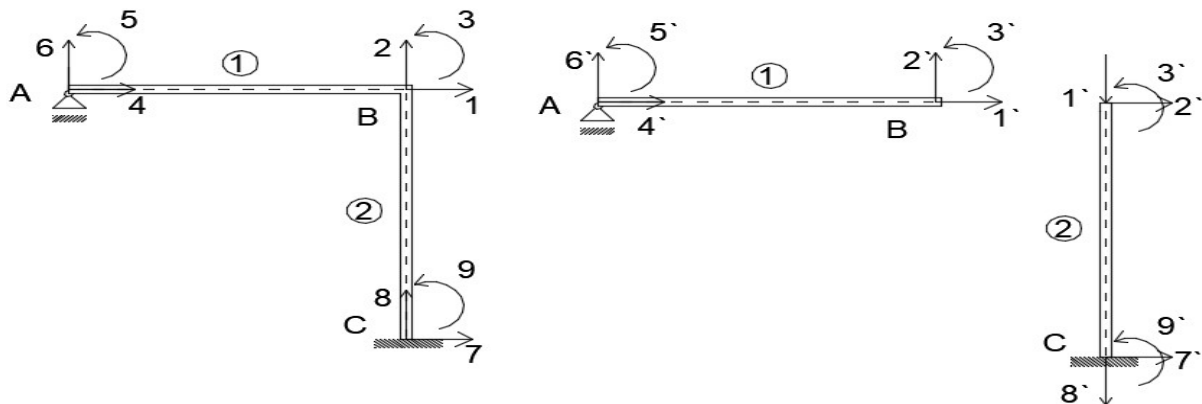


Slika 15. Statički sustav

Gore prikazani statički neodređeni sustav ćemo rastaviti na 2 štapa- štap A-B i štap B-C-razlog tome je što ćemo za svaki štap posebno računati unutarnje sile, te ćemo prikazati razliku između globalnog koordinatnog sustava i lokalnog koordinatnog sustava štapova, odnosno sistema; potrebno je razložiti sustav na globalni i lokalni koordinatni sustav, a konvencija predznaka vijedi kao gore navedena u teorijskom dijelu :

Globalni sustav :

Lokalni sustav :

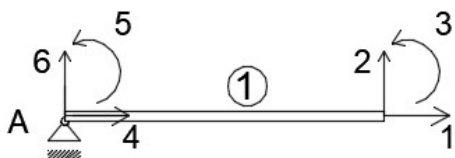


Slika 16. Globalni i lokalni sustav sistema

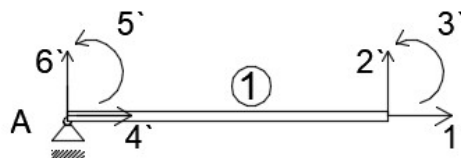
Za početak ćemo izračunati krutosti pojedinih štapova te ih prebaciti u matrični oblik kako bi postavili i riješili jednadžbe ravnoteže u matričnom obliku:

### Štap 1:

Globalni sustav :



Lokalni sustav :



Slika 17. Kordinatni sustavi štapa 1

Proračun aksijalne, posmične i fleksijske krutosti 1. štapa :

$$\frac{AE}{L} = \frac{(6 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)}{6 \text{ m}} = 2 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6 \text{ m}} = 2,4 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6 \text{ m}} = 1,2 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6^2 \text{ m}} = 6 \text{ 000 kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6^3 \text{ m}} = 2 \text{ 000 kN/m}$$

Matrica krutosti štapa 1 :

Obzirom da su lokalni i globalni kordinatni sustav 1. štapa ekvivalentni, globalna matrica krutosti 1. štapa i lokalna matrica krutosti 1. štapa su jednake.

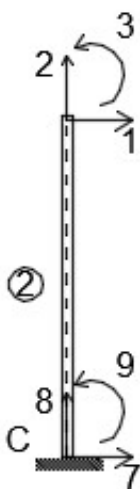
$$[k]_1 = [k]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_1 = [k]_1 = x 10^3 \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & -6 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 24 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

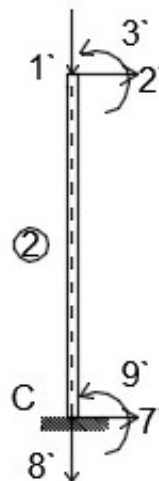
## Štap 2 :

Globalni i lokalni sustav štap :

Globalni sustav :



Lokalni sustav :



Slika 18. Kordinatni sustava štap 2

Proračun aksijalne, posmične i fleksijske krutosti 2. štap :

$$\frac{AE}{L} = \frac{(6 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)}{6 \text{ m}} = 2 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6 \text{ m}} = 2,4 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6 \text{ m}} = 1,2 \times 10^4 \text{ kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6^2 \text{ m}} = 6 \text{ 000 kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(180 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{6^3 \text{ m}} = 2 \text{ 000 kN/m}$$

Lokalna matrica krutosti štapa 2 :

$$[k]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 7' & 8' & 9' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 7' \\ 8' \\ 9' \end{matrix} & \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & -AE/L & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ -AE/L & 0 & 0 & 0 & AE/L & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_2 = \times 10^3 \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 7' & 8' & 9' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 7' \\ 8' \\ 9' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & -6 & 0 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Lokalna matrica krutosti je jednaka za oba štapa jer su istih karakteristika i jednake dužine.

Gore na slici je vidljivo da se lokalni i globalni kordinatni sustav 2. štapa ne poklapaju, a kako bi mogli uravnotežiti 2 štapa u čvoru B, potrebno je transformirati lokalni sustav u globalni kordinatni sustav, a to se postiže pomoću matrica transformacija :

**Matrica transformacije :**

$$\Lambda_{ix} = \cos (-90^\circ) = 0$$

$$\Lambda_{iy} = \sin (-90^\circ) = -1$$





$$\Lambda_{iy} = \cos(-90^\circ) = 0$$

$$\Lambda_{jy} = \sin(-90^\circ) = -1$$

Transformacijska matrica :

$$[T]_2^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 7' & 8' & 9' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = [T]_2^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Globalna matrica štapa 2 se dobije :

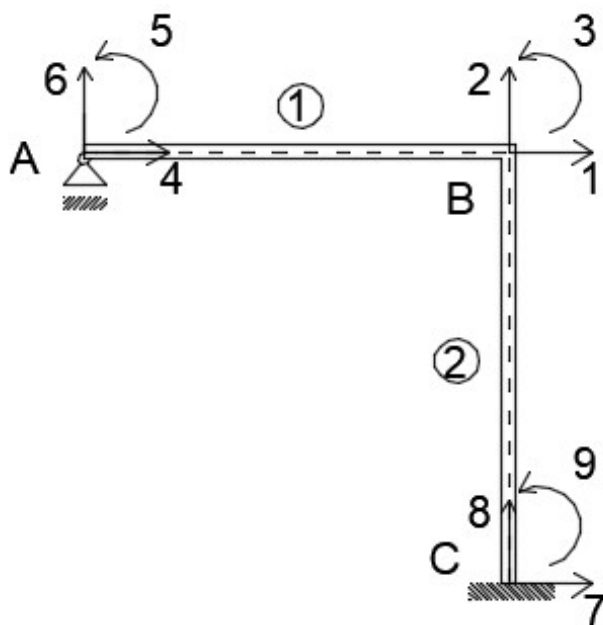
$$[k]_2 = [T]_2^T [k']_2 [T]$$

$$[k]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & AE/L & 0 & 0 & -AE/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 \\ 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_2 = \times 10^3 \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 200 & 0 & 0 & -200 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 24 & -6 & 0 & 12 \\ 7 & -2 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 12 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

### Globalna 9x9 matrica statičkog sustava:

Nakon što smo odredili globalne matrice krutosti oba štapa, potrebno je odrediti globalnu matricu krutosti cijelog statičkog sustava, kao što je vidljivo dolje na slici, štapovi se sastaju u čvoru te se zbrajaju njihove krutosti :



Slika 19. Globalni koordinatni sustav sistema



$$[k]^{GL} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & AE/L + 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & -AE/L & 0 & 0 & -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 2 & 0 & 12EI/L^3 + AE/L & -6EI/L^2 & 0 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & -AE/L & 0 \\ 3 & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 4EI/L + 4EI/L & 0 & 2EI/L & 6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ 4 & -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & 4EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 8 & 0 & -AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & 0 \\ 9 & 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 0 & 0 & 0 & -6EI/L^2 & 0 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$[k]^{GL} = \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 202 & 0 & 6 & -200 & 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 202 & -6 & 0 & -6 & -2 & 0 & -200 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & 48 & 0 & 12 & 6 & -6 & 0 & 12 \\ 4 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 12 & 0 & 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 6 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Globalna jednadžba veze između pomaka i sile statičkog sustava :

$$[Q] = [K]^{GL} [D] + [Q^F]$$



$$\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 202 & 0 & 6 & -200 & 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 202 & -6 & 0 & -6 & -2 & 0 & -200 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & 48 & 0 & 12 & 6 & -6 & 0 & 12 \\ 4 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 12 & 0 & 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 6 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zbog rubnih uvjeta pomaci  $D_6, D_7, D_8, D_9$  su jednaki nuli te ćemo globalnu  $9 \times 9$  matricu krutosti statičkog sustava prebaciti u  $5 \times 5$  matricu :

$$[k]^{GL} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 202 & 0 & 6 & -200 & 0 \\ 2 & 0 & 202 & -6 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & -6 & 48 & 0 & 12 \\ 4 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Globalna jednačba veze između pomaka i sile statičkog sustava :

$$[Q] = [K]^{GL} [D] + [Q^F]$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 = 20 \text{ kN} \\ Q_2 = 0 \\ Q_3 = 0 \\ Q_4 = 0 \\ Q_5 = 0 \end{bmatrix} = \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 202 & 0 & 6 & -200 & 0 \\ 0 & 202 & -6 & 0 & -6 \\ 6 & -6 & 48 & 0 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje matrične jednadžbe :

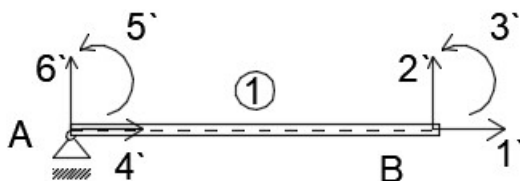
$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,51 \text{ (mm)} \\ -0,0375 \text{ (mm)} \\ -0,0025 \text{ (rad)} \\ 17,51 \text{ (mm)} \\ 0,0012 \text{ (rad)} \end{bmatrix}$$

Za rješavanje svih matričnih jednadžbi u radu korišten je program MATLAB 2017.

Kao rješenje jednadžbe smo dobili pomake, pomaci  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_4$  su u milimetrima, dok kutevi zaokreta  $D_3$ ,  $D_5$  su radijanima.

Nakon što smo dobili globalne pomake čvorova statičkog sustava, promatra se svaki štap posebno sa pomacima dobijenim u prethodnom koraku, ponovno se uspostavlja veza između pomaka i sila za svaki štap te se računaju unutarnje stvarne sile štapa:

**Štap 1 :**



Slika 20. Štap 1

Jednadžba ravnoteže štapu:

gdje nam je:

$q$ - vektor čvornih unutarnjih sila

$q^F$ -vektor reakcije opterećenja štapu

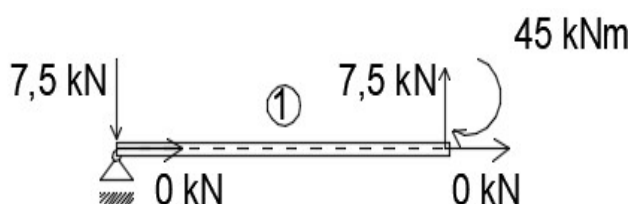
$q^F$  je jednak nuli jer nema sila od 20 kN djeluje samo u čvoru, te da smo imali npr. kontinuirano djelovanje na štapu,  $q^F$  nebi bio nula nego bi imao nekakvu vrijednost, takav primjer se može vidjeti u 2. zadatku

$$[q] = [k][d] + [q^F]$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & -6 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 = 17,51 \times 10^{-3} \\ D_5 = 0 \\ D_6 = 1,243 \times 10^{-3} \\ D_1 = 17,51 \times 10^{-3} \\ D_2 = -37,47 \times 10^{-6} \\ D_3 = -2,505 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Rješenje jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{kN} \\ -7,5 & \text{kN} \\ 0 & \text{kNm} \\ 0 & \text{kN} \\ 7,5 & \text{kN} \\ -45 & \text{kNm} \end{bmatrix}$$



Slika 21. Rješenje jednadžbe

### Štap 2 :

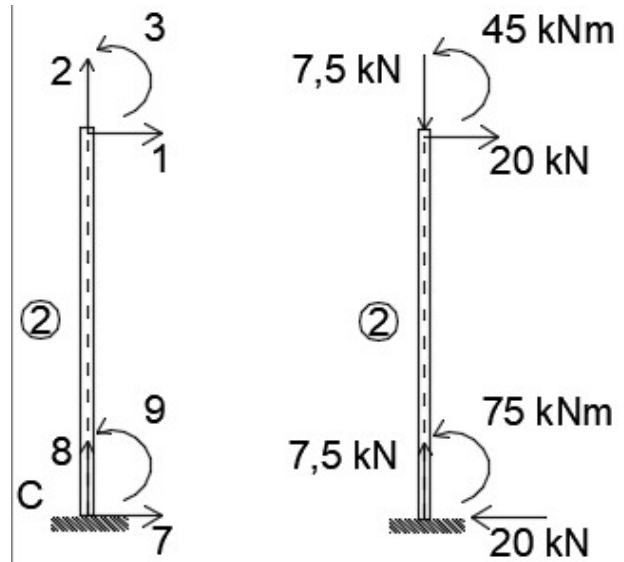
Jednadžba ravnoteže štapa :

$$[q] = [k][d] + [q^F]$$

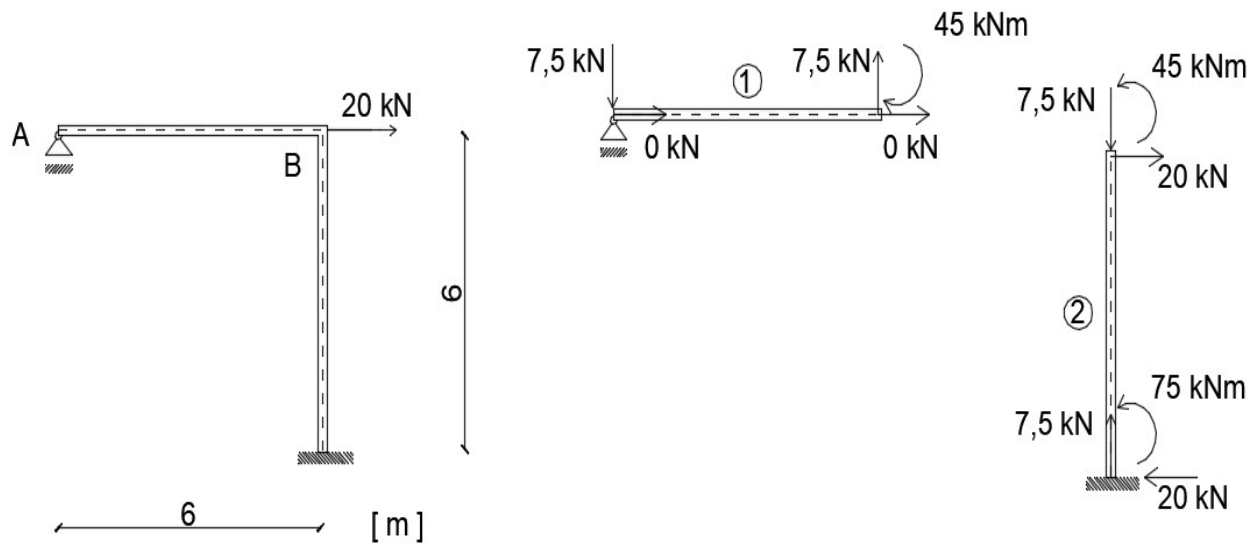
$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix} = \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 200 & 0 & 0 & -200 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 24 & -6 & 0 & 12 \\ 7 & -2 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 12 & -6 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 = 17,51 \times 10^{-3} \\ D_2 = -37,47 \times 10^{-6} \\ D_3 = -2,505 \times 10^{-3} \\ D_7 = 0 \\ D_8 = 0 \\ D_9 = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \text{ kN} \\ -7,5 \text{ kN} \\ 45 \text{ kNm} \\ -20 \text{ kN} \\ 7,5 \text{ kN} \\ 75 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$



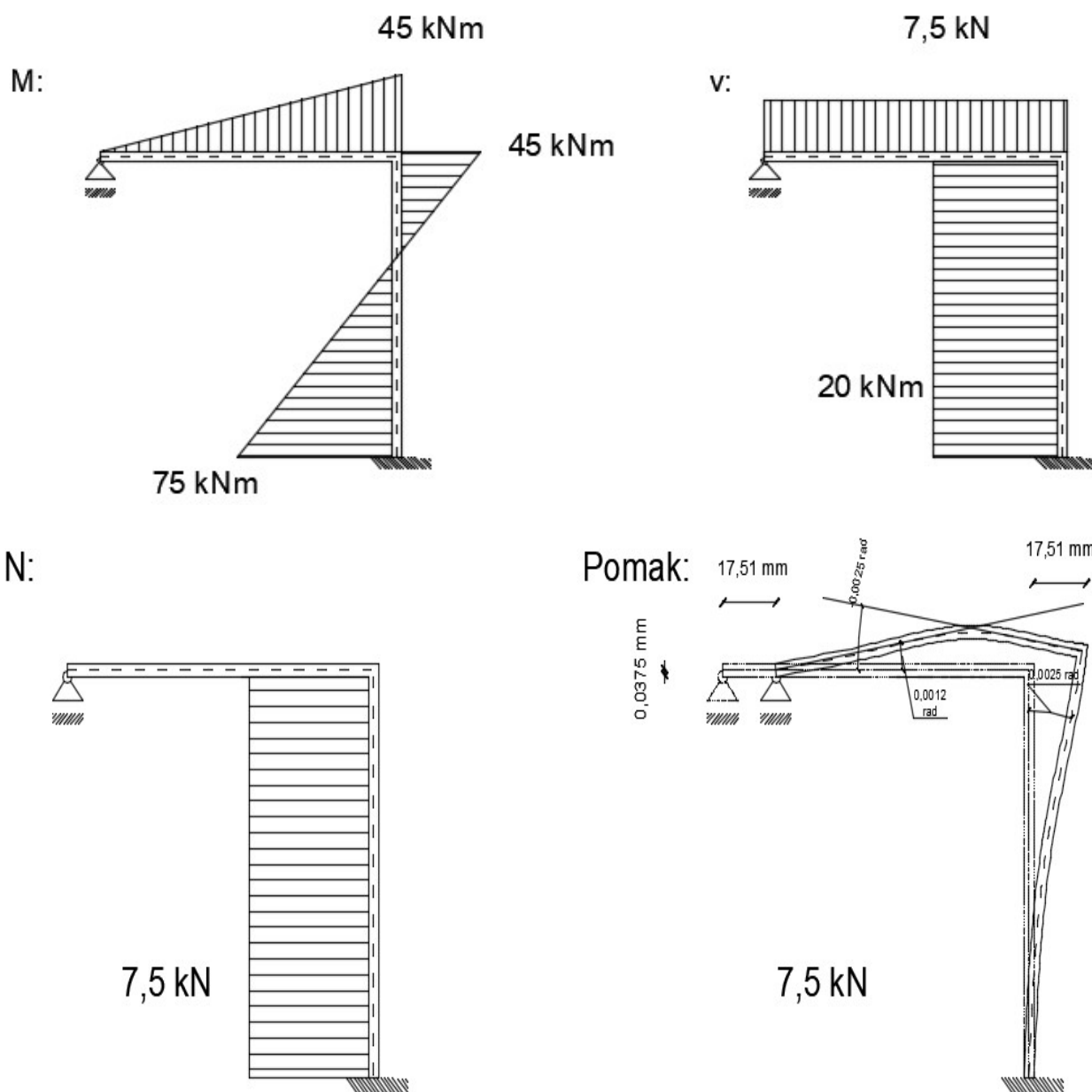
Unutarnje sile kao rezultati jednadžbe veze sile i pomaka :



Slika 22. Konačni rezultati unutarnjih sila



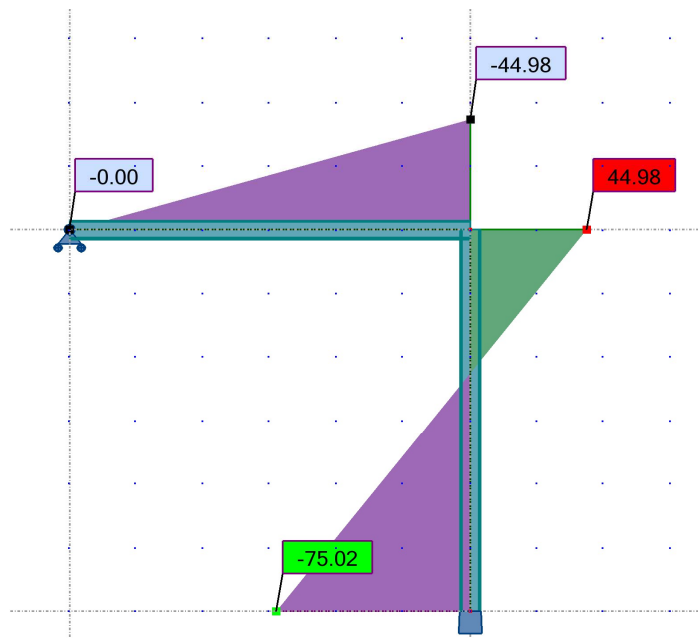
5.1. Dijagrami :



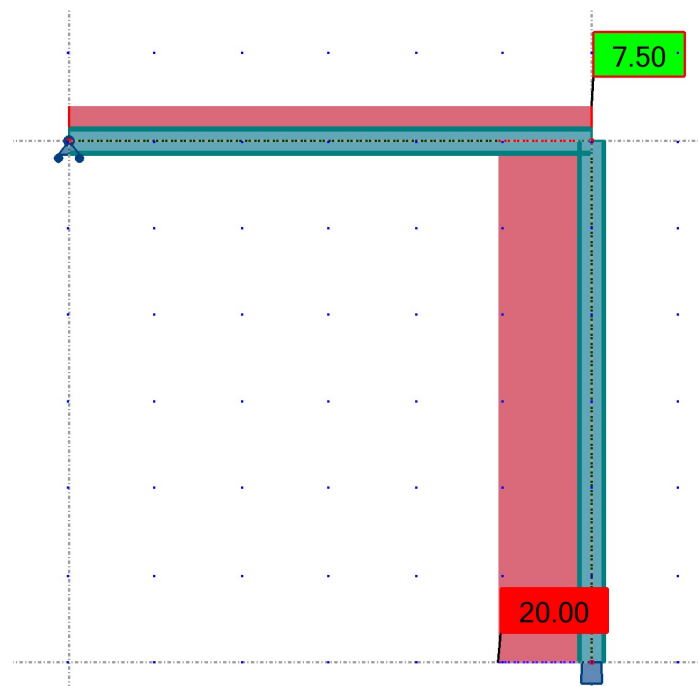
Slika 23. Dijagrami unutarnjih sila

5.2.Numerički model 1. zadatka –Autodesk Robot Structural Analysis Profesional 2016

Momentni dijagram :

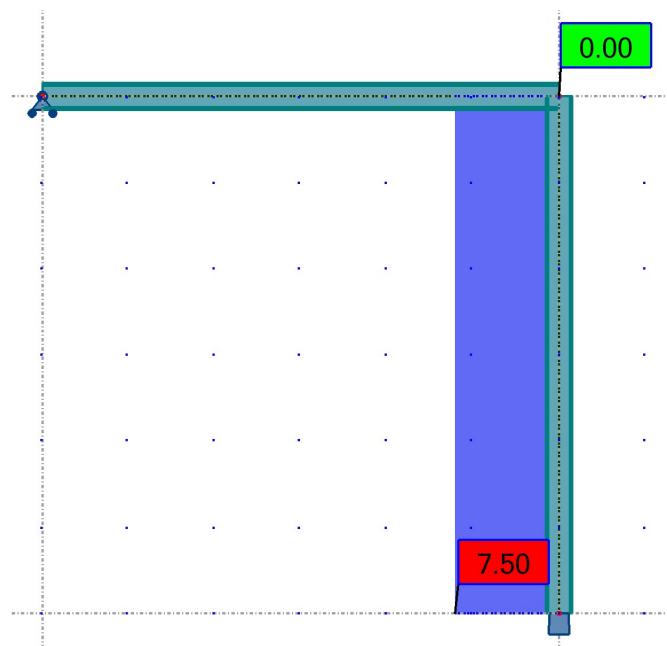


Dijagram poprečne sile :

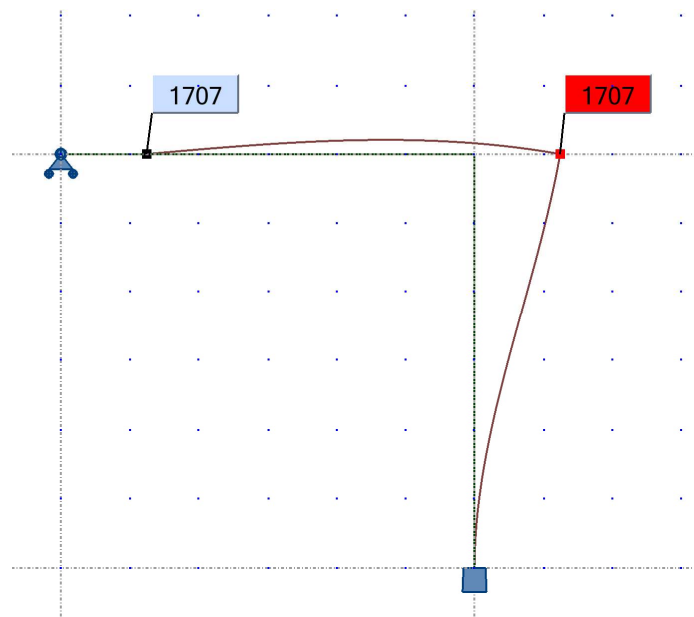




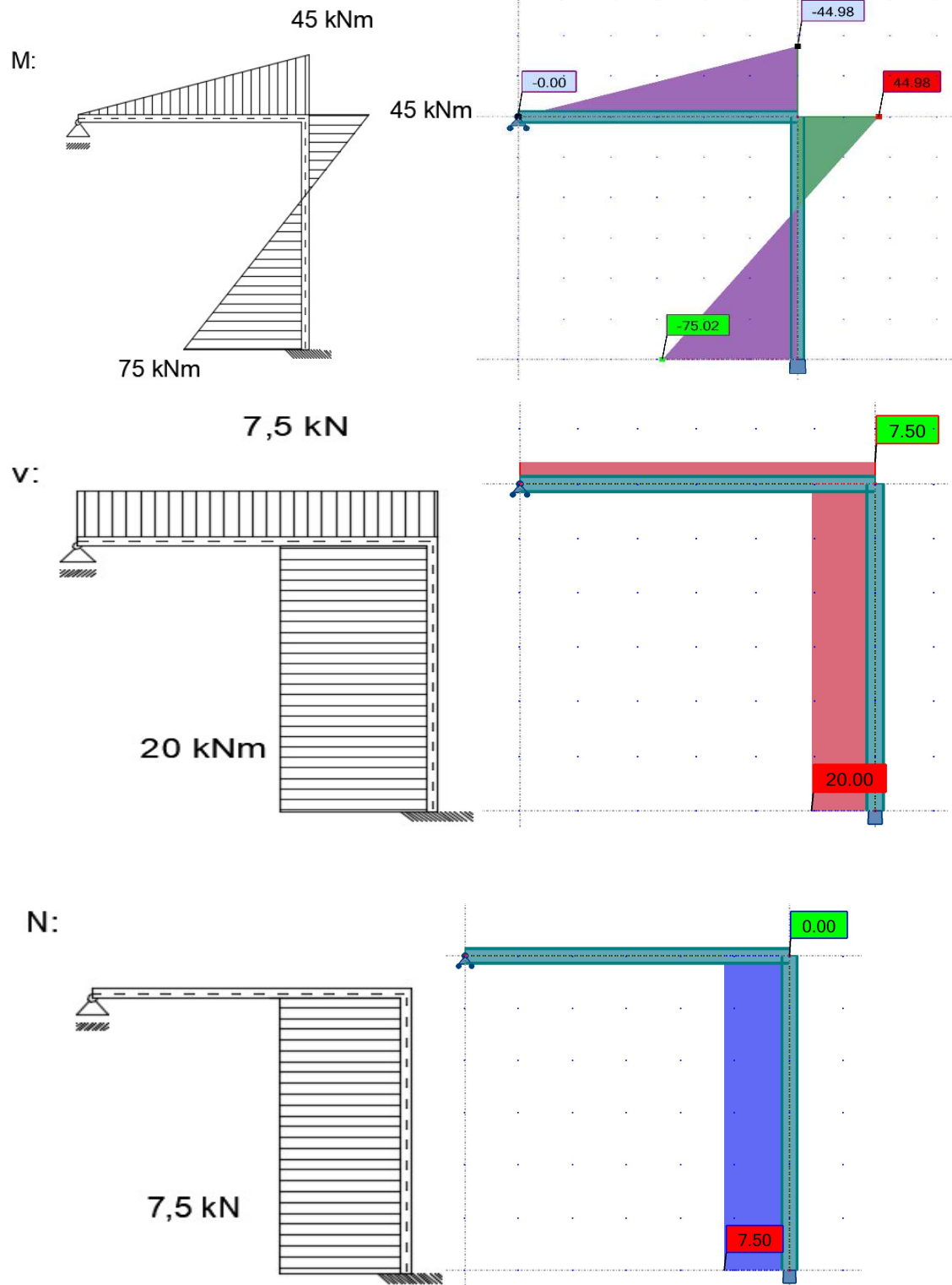
Dijagram uzdužne sile :

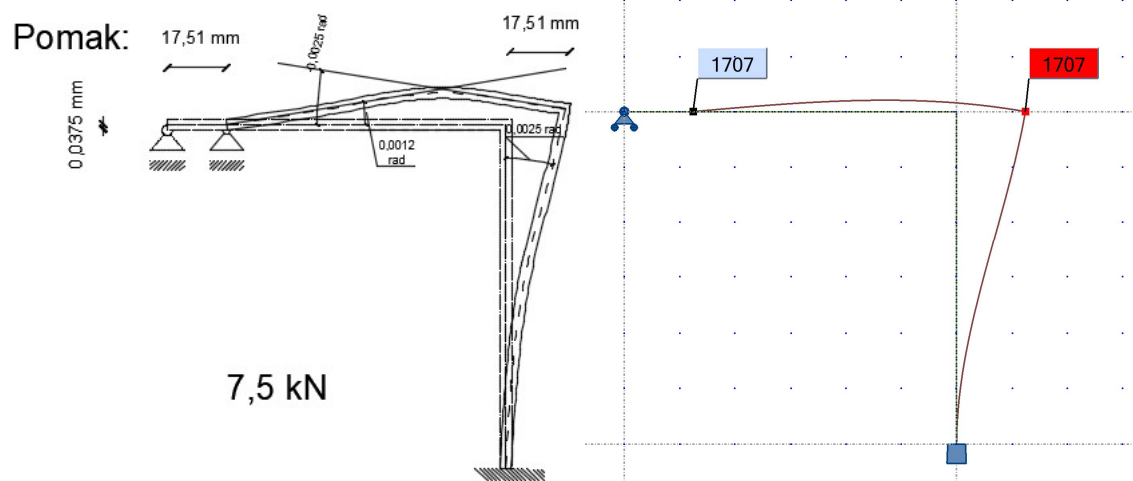


Dijagram pomaka:



### 5.3. Usporedba analitičkog i numeričkog modela:



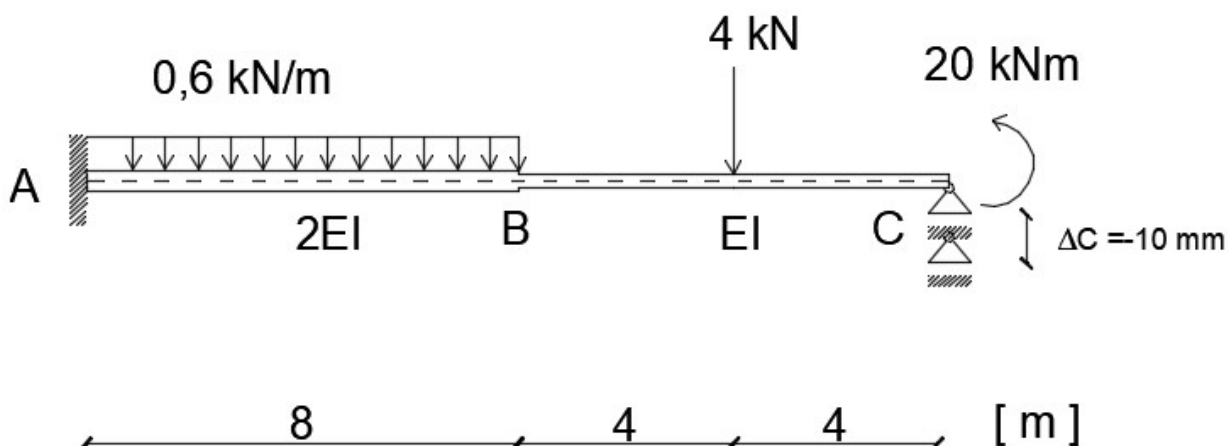


Slika 24. Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog modela

## 6. Zadatak 2 :

Točnom metodom pomaka će se riješiti statički sustav prikazan na slici. Potrebno je odrediti sljedeće nepoznanice: reakcije u ležajevima, dijagrame unutarnjih sila te pomak i zaokret točke B. Za štap A-B vrijedi  $2EI$  u odnosu na štap B-C što je i naznačeno na slici. Prisilni pomak se nalazi na ležaju C.

Moment tromosti :  $I = 200(10^6) \text{ mm}^4$ , površina poprečnog presjeka :  $A = 6(10^3) \text{ mm}^2$ , Young-ov modul elastičnosti :  $E = 200 \text{ kN/mm}^2$



Slika 25. Statički sustav

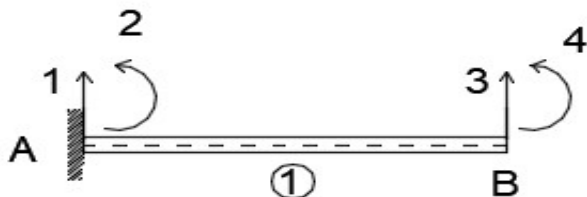
Obzirom da se lokalni kordinatni sustavi oba štapa poklapaju sa globalnim kordinatnim sustavom, nema potrebe za transformacijom matrica jer su lokalna i globalna matrica štapa ekvivalentne-jednake.

Gore prikazani statički neodređeni sustav ćemo rastaviti na 2 štapa- štap A-B i štap B-C te ćemo za svaki štap odrediti matrice krutosti.

Matrice krutosti štapova će biti oblika  $4 \times 4$  jer u zadatku nema nikakve uzdužne sile koja djeluje na sustav te iz tog razloga nam aksijalna krutost ne igra nikakvu ulogu.

**Štap 1:**

**Globalni sustav :**



Proračun fleksijske i posmične krutosti:

Uzevši u obzir da za štap A-B vrijedi **2EI** u odnosu na štap B-C , slijedi :

$$\frac{4EI}{L} = \frac{2 * 4(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8 \text{ m}} = 40\,000 \text{ kN/m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2 * 2(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8 \text{ m}} = 20\,000 \text{ kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{2 * 6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8^2 \text{ m}} = 7500 \text{ kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{2 * 12 * 6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8^3 \text{ m}} = 1875 \text{ kN/m}$$

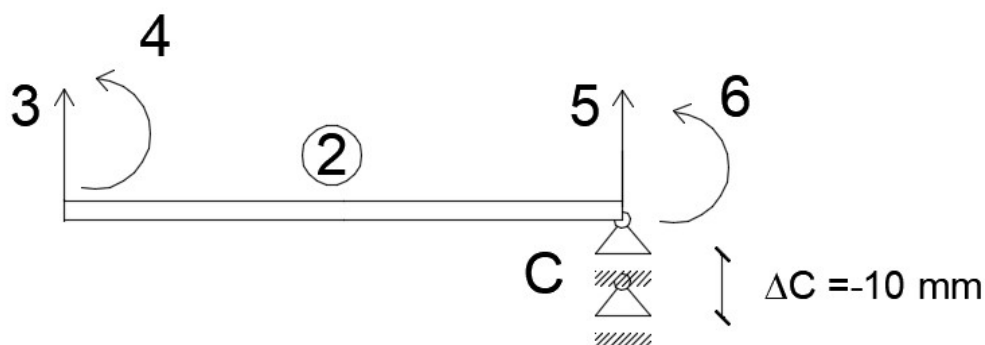
*Matrica krutosti štapa 1 :*

$$[k]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1875 & 7500 & -1875 & 7500 \\ 7500 & 40000 & -7500 & 20000 \\ -1875 & -7500 & 1875 & -7500 \\ 7500 & 20000 & -7500 & 40000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Štap 2 :

Globalni sustav štap :



Proračun fleksijske i posmične krutosti:

$$\begin{aligned} \frac{4EI}{L} &= \frac{4(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8 \text{ m}} = 20\,000 \text{ kN/m} \\ \frac{2EI}{L} &= \frac{2(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8 \text{ m}} = 10\,000 \text{ kN/m} \\ \frac{6EI}{L^2} &= \frac{6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8^2 \text{ m}} = 3750 \text{ kN/m} \\ \frac{12EI}{L^3} &= \frac{12 * 6(200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2)(200 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{8^3 \text{ m}} = 937,5 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

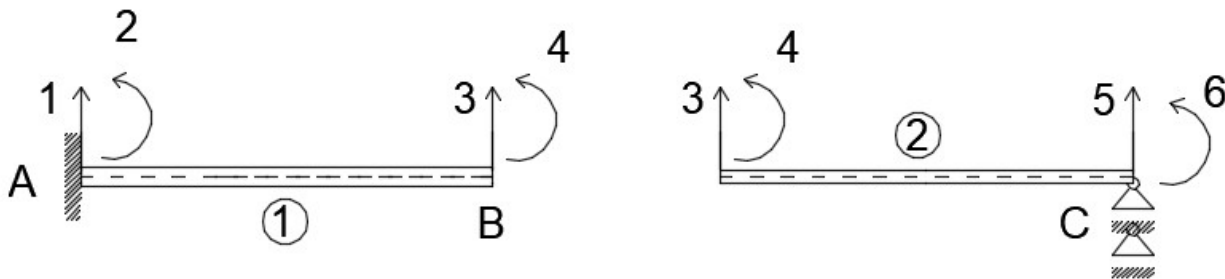


Globalna matrica krutosti oblika 4x4 štapa 2 :

$$[k]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 937,5 & 3750 & -937,5 & 3750 \\ 3750 & 20000 & -3750 & 10000 \\ -937,5 & -3750 & 937,5 & -3750 \\ 3750 & 10000 & -3750 & 20000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**Globalna matrica sustava** - nakon što smo odredili globalne matrice krutosti oba štapa, potrebno je odrediti globalnu matricu krutosti cijelog statičkog sustava, kao što je vidljivo dolje na slici, štapovi se sastaju u čvoru te je krutost u tom čvoru jednaka sumi krutosti oba štapa.



Slika 26. Globalni sustav štapova

Uzevši u obzir da su pomaci  $D_1, D_2$  jednaki nuli zbog rubnih uvjeta, a pomak  $D_5$  je zadan 10 mm, odnosno te kako su nam ti pomaci jednaki 0 osim  $D_5$  koji je različit od nule a on će biti razmatran i pojašnjen posebno u jednadžbi, postaviti ćemo globalnu matricu u obliku  $3 \times 3$  kako slijedi:

$$[k]^{GL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12EI/L^3 + 12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L + 4EI/L & 2EI/L \\ 6EI/L^2 & 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]^{GL} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2812,5 & -3750 & 3750 \\ -3750 & 30000 & 10000 \\ 3750 & 10000 & 20000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Nakon što smo proračunali matrice krutosti oba štapa, te postavili globalnu matricu statičkog sustava, slijedi postavljanje globalne veze između pomaka i sila statičkog sustava :

$$[Q] = [K]^{GL} [D] + [Q^F]$$

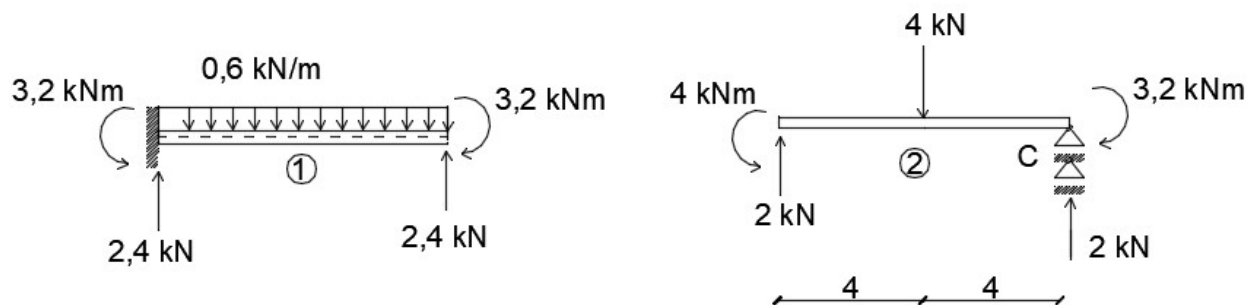
gdje je:

$[Q]$  – poznati vektor čvornog opterećenja

$[K]$  – globalna matrica krutosti

$[D]$  – nepoznati vektor čvornog pomaka

$[Q^F]$  – vektor reakcije opterećenja štapa



Slika 27. Reakcije štapova djeovanjem vanjskim opterećenjem

Pomak  $D_5$  se zbraja u jednadžbi kao opterećenje tj. rezultat direktne veze pomaka i krutosti kako slijedi :

$$\begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2812,5 & -3750 & 3750 \\ -3750 & 30000 & 10000 \\ 3750 & 10000 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_6 \end{bmatrix} + \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -937,5 \\ -3750 \\ 3750 \end{bmatrix} (D_5 = -0,01m) + \begin{bmatrix} Q_3^F \\ Q_4^F \\ Q_6^F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_3 = 0 \\ Q_4 = 0 \\ Q_6 = 20 \text{ kNm} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2812,5 & -3750 & 3750 \\ -3750 & 30000 & 10000 \\ 3750 & 10000 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,375 \\ 37,5 \\ 37,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,4+2=4,4 \\ -3,2+4=0,8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

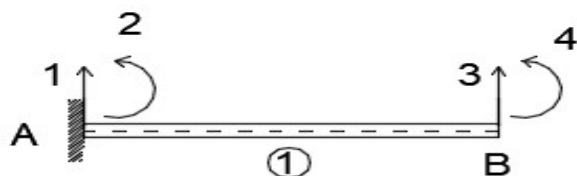
Rješenje jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,433 \times 10^{-3} \text{ (m)} \\ -1,538 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \\ 1,863 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \end{bmatrix}$$

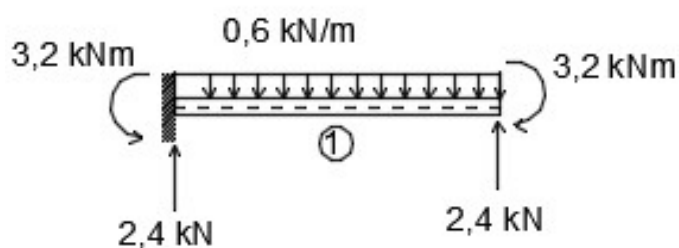
Nakon što smo dobili globalne pomake čvorova statičkog sustava, promatra se svaki štap posebno sa pomacima dobijenim u prethodnom koraku, ponovno se uspostavlja veza između pomaka i sila te se računaju unutarnje stvarne sile štapa:

Štap 1 :

Globalni sustav :



Reakcije na štapu kao rezultat djelovanja kontinuiranim opterećenjem:



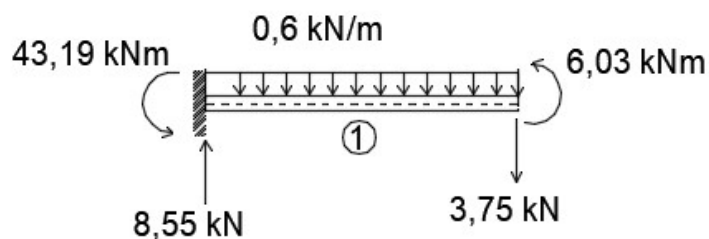
Jednadžba ravnoteže štapu:

$$[q]_1 = [k]_1 [d]_1 + [q^F]_1$$

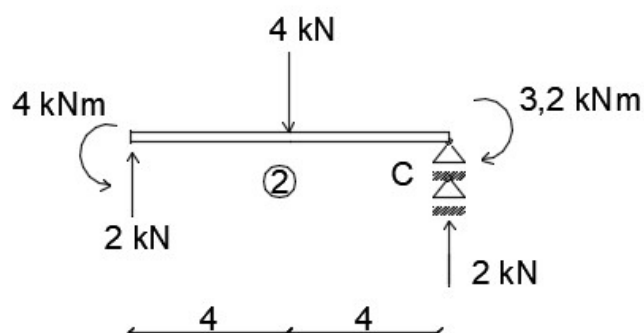
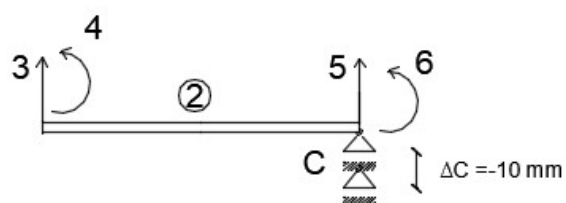
$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1875 & 7500 & -1875 & 7500 \\ 7500 & 40000 & -7500 & 20000 \\ -1875 & -7500 & 1875 & -7500 \\ 7500 & 20000 & -7500 & 40000 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = -9,433 \times 10^{-3} \text{ (m)} \\ d_4 = -1,538 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,4 \\ 3,2 \\ 2,4 \\ -3,2 \end{bmatrix}$$

Rješenje jednačbe:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,55 \text{ kN} \\ 43,19 \text{ kNm} \\ -3,75 \text{ kN} \\ 6,03 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$



Štap 2 :



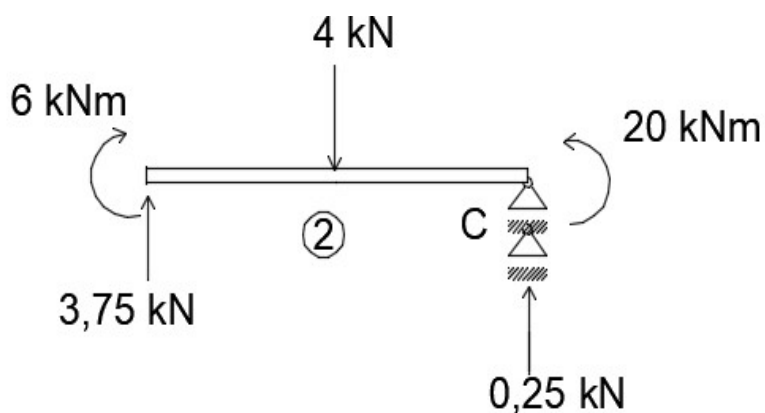
Jednačba ravnoteže štapa :

$$[q] = [k][d] + [q^F]$$

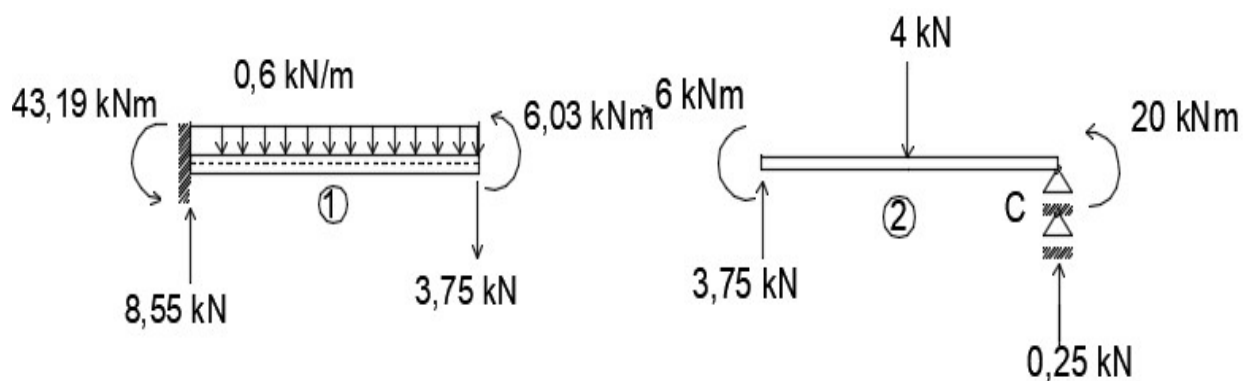
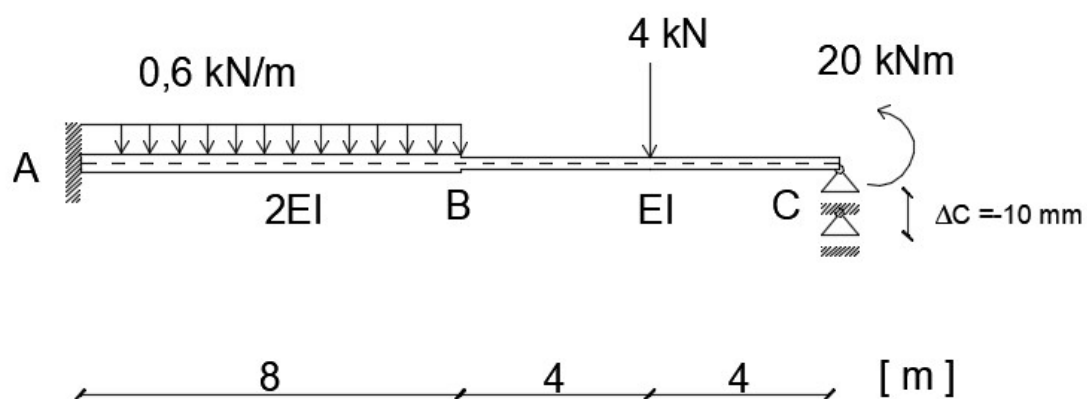
$$\begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 937,5 & 3750 & -937,5 & 3750 \\ 3750 & 20000 & -3750 & 10000 \\ -937,5 & -3750 & 937,5 & -3750 \\ 3750 & 10000 & -3750 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 = -9,433 \times 10^{-3} \text{ (m)} \\ d_4 = -1,538 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \\ d_5 = 0,01 \text{ (m)} \\ d_6 = 1,863 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Rješenje jednačbe:

$$\begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,75 \text{ kN} \\ -6 \text{ kNm} \\ 0,25 \text{ kN} \\ 20 \text{ kNm} \end{bmatrix}$$

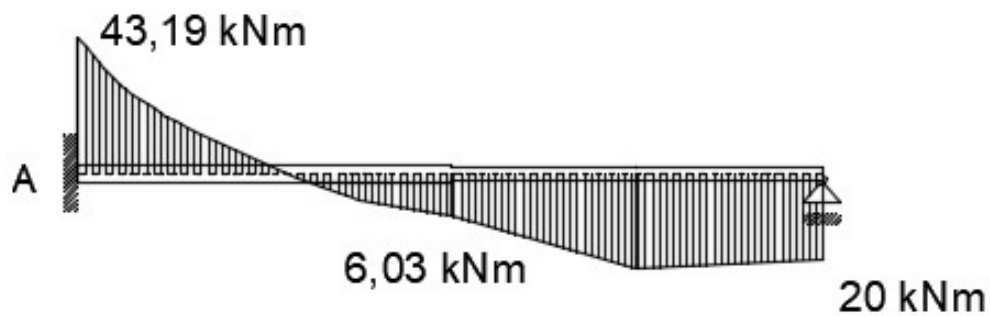


Unutarnje sile kao rezultati jednačbe veze sile i pomaka :

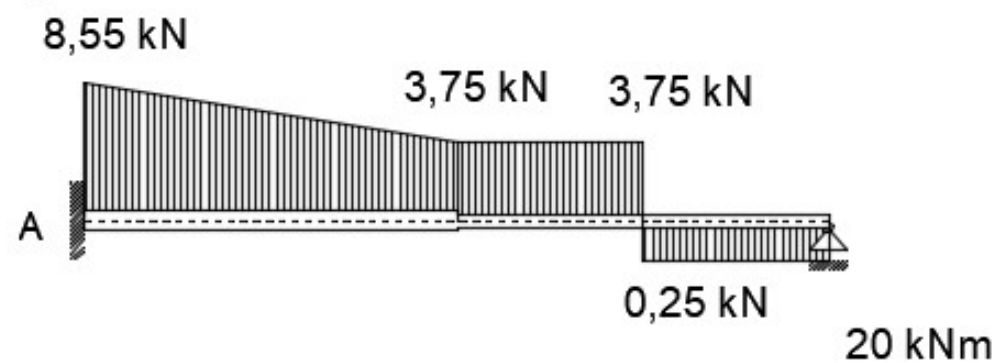


6.1. Dijagrami :

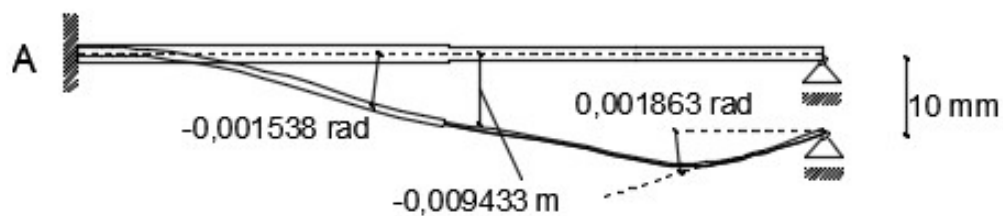
M :



V :



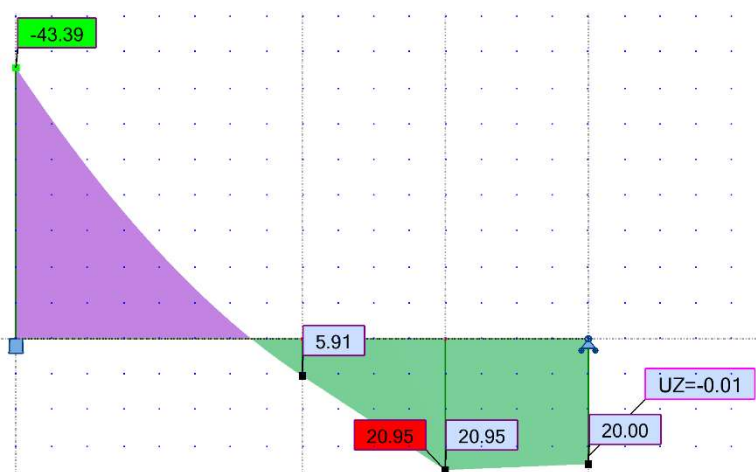
Pomak :



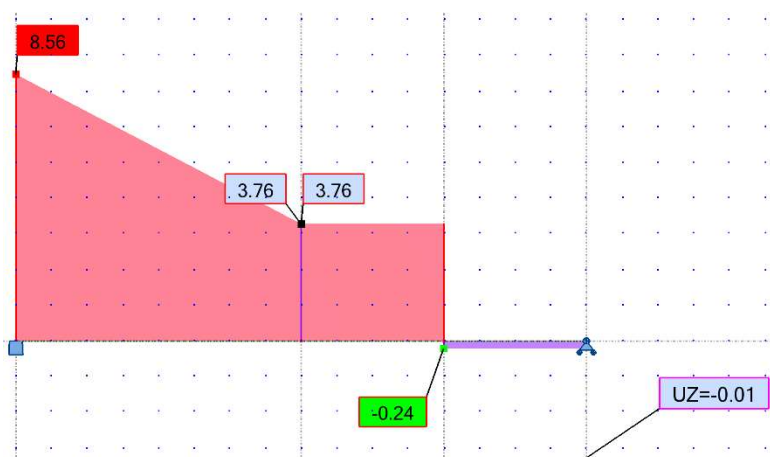
Slika 28. Rezultati analitičkog rješavanja statičkog sustava



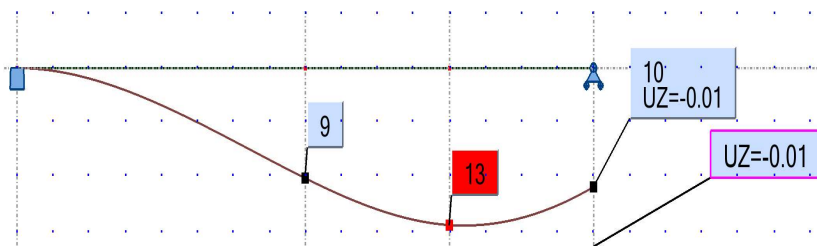
6.2. Numerički model 2. zadatka –Autodesk Robot Structural Analysis Profesional 2016  
Momentni dijagram :



Dijagram poprečne sile :

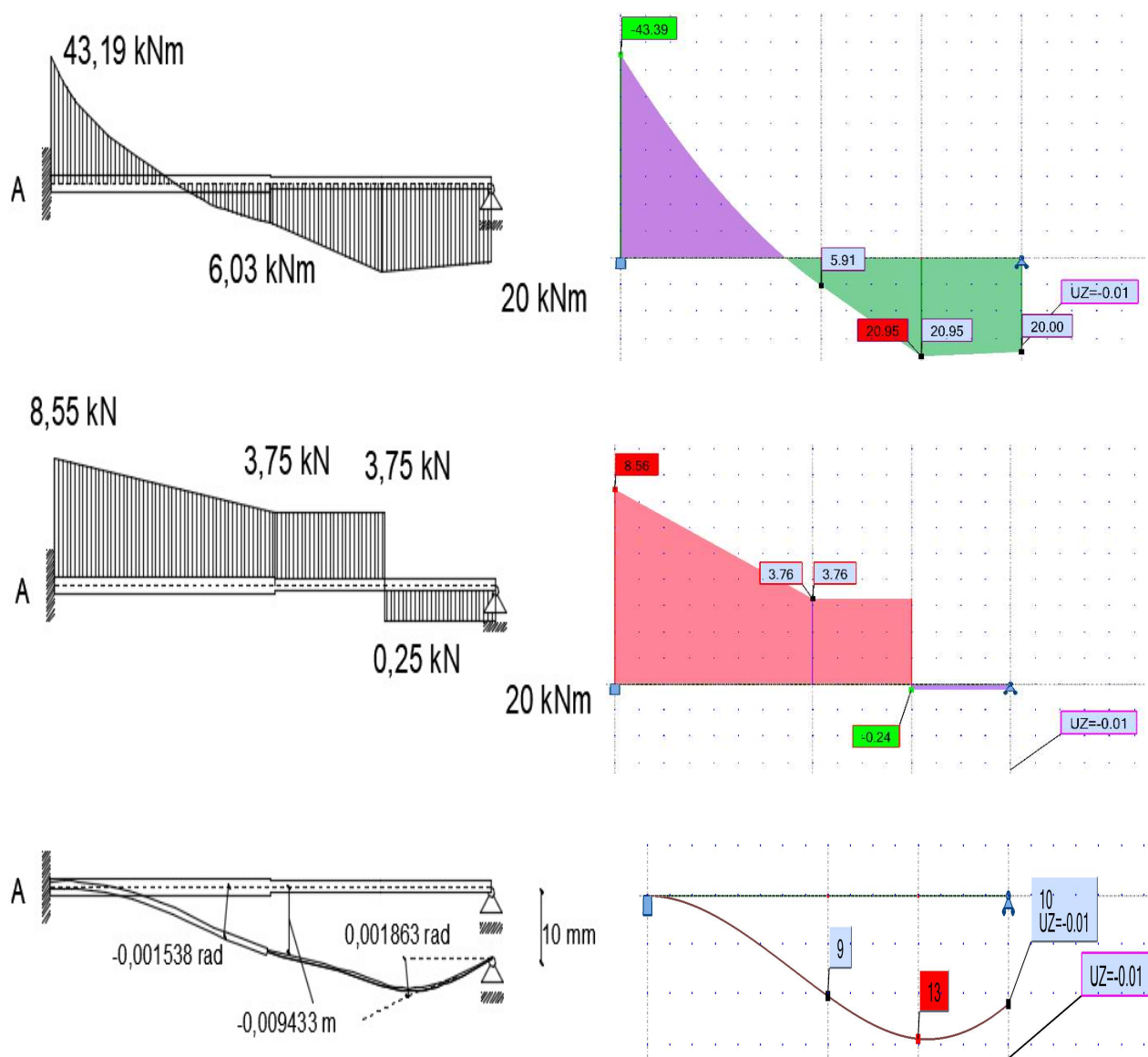


Dijagram pomaka:





### 6.3. Usporedba analitičkog i numeričkog modela:



Slika 29. Usporedba rezultata analitičkog i numeričkog modela



## **7. Zaključak :**

Usporedbom dobivenih rezultata analitičkog primjera zadatka i numeričkog čiji su rezultati analizirani u softverskom paketu Autodesk Robot Structural Analysis Profesional 2016 vidljivo je da se rezultati nešto malo razlikuju, a posljedica toga je pogreška pri zaokruživanju rezultata na nekoliko decimala. Gore navedeni postupci rješavanja statičkih neodređenih sustava točnom metodom pomaka mogu biti izuzetno složeni za rješavanje kad imamo zahtjevniji statički sustav, nepravilne oblike štapova ili kada geometrijske karakteristike nisu kontinuirane kroz cijeli statički sustav.



## 8. Litaratura :

- <https://hr.wikipedia.org/wiki/Krutost>
- [http://www.gf.unsa.ba/portal/tln2/metoda\\_deformacija.pdf](http://www.gf.unsa.ba/portal/tln2/metoda_deformacija.pdf)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Direct\\_stiffness\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Direct_stiffness_method)
- Understanding Nonlinear Analysis, SolidWorks
- Lozančić Silva, Kalman-Šipoš Tanja, Grubišić Marin  
<http://www.gfos.unios.hr/preddiplomski-sveucilisni-studij-gradevinarstvo/nastavni-materijali-kolegija-grad-stat-ii-pss-grad>
- Analysis of Statically Indeterminate Structures by the Direct Stiffness Method  
<http://nptel.ac.in/courses/105105109/pdf/m4l29.pdf>
- MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS with an Introduction to Finite Elements  
[http://www4.hcmut.edu.vn/~vinhbd/Documents/Matrix%20Structural%20Ananysis%20\(with%20an%20Introduction%20to%20Finite%20Elements\).pdf](http://www4.hcmut.edu.vn/~vinhbd/Documents/Matrix%20Structural%20Ananysis%20(with%20an%20Introduction%20to%20Finite%20Elements).pdf)
- Structural and stress analysis, T.H.G. MEGSON
- Structural analysis- stiffness method  
<https://www.slideshare.net/280632796/ch-1-structural-analysis-stiffness-method>
- <http://www.enggprog.com/Downloads/Lectures/struc1/Lecture-10.pdf>
- FRAME ANALYSIS USING THE STIFFNESS METHOD  
[http://www.sut.ac.th/engineering/civil/courseonline/430332/pdf/07\\_matrix\\_frame.pdf](http://www.sut.ac.th/engineering/civil/courseonline/430332/pdf/07_matrix_frame.pdf)
- PRIMJENA METODE KONAČNIH ELEMENATA U GRAĐEVINARSTVU; Vladimir Mirković, Josip Užar
- Anđelić Milutin, Građevna statika II, Zagreb, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
- [https://www.grad.unizg.hr/\\_download/repository/DKPI\\_odredivanje\\_koeficijenata\\_kruto sti\\_i\\_fleksibilnosti.pdf](https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/DKPI_odredivanje_koeficijenata_kruto sti_i_fleksibilnosti.pdf)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Structural\\_analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Structural_analysis)